1) *Lösung.* a) Wie man in folgendem Baum sehen kann, sind sowohl

$$(p \to q) \land (p \land \neg q)\{p \mapsto \mathsf{True}\}$$

als auch

$$(p \to q) \land (p \land \neg q)\{p \mapsto \mathsf{False}\}$$

unerfüllbar und somit ist nach Lemma 1.5 im Skript auch

$$(p \to q) \land (p \land \neg q)$$

unerfüllbar.

$$\begin{tikzcd} & (p \to q) \land (p \land \neg q) \arrow[dl, "\{p \mapsto \mathsf{True}\}"'] \arrow[dr, "\{p \mapsto \mathsf{False}\}"] & \\ \begin{array}{c}(\mathsf{True} \to q) \land (\mathsf{True} \land \neg q) \\ \equiv q \land \neg q \\ \equiv \mathsf{False}\end{array} & & \begin{array}{c}(\mathsf{False} \to q) \land (\mathsf{False} \land \neg q) \\ \equiv \mathsf{True} \land \mathsf{False} \\ \equiv \mathsf{False}\end{array}\end{tikzcd}$$

b) Wie man in folgendem Baum sehen kann, sind sowohl

$$(p \to q) \lor (p \land \neg q)\{p \mapsto \mathsf{True}\}$$

als auch

$$(p \to q) \lor (p \land \neg q)\{p \mapsto \mathsf{False}\}$$

Tautologien und somit ist nach Lemma 1.5 im Skript auch

$$(p \to q) \lor (p \land \neg q)$$

eine Tautologie.

$$\begin{tikzcd} & (p \to q) \lor (p \land \neg q) \arrow[dl, "\{p \mapsto \mathsf{True}\}"'] \arrow[dr, "\{p \mapsto \mathsf{False}\}"] & \\ \begin{array}{c}(\mathsf{True} \to q) \lor (\mathsf{True} \land \neg q) \\ \equiv q \lor \neg q \\ \equiv \mathsf{True}\end{array} & & \begin{array}{c}(\mathsf{False} \to q) \lor (\mathsf{False} \land \neg q) \\ \equiv \mathsf{True} \lor \mathsf{False} \\ \equiv \mathsf{True}\end{array}\end{tikzcd}$$

c) Wie man in folgendem Baum sehen kann, ist die Formel erfüllbar, aber keine Tautologie.

$$(p \to q) \land (p \land \neg r)$$

- $\{p \mapsto \mathsf{True}\}$: $(\mathsf{True} \to q) \land (\mathsf{True} \land \neg r) \equiv q \land \neg r$
  - $\{q \mapsto \mathsf{True}\}$: $\mathsf{True} \land \neg r \equiv \neg r$
    - $\{r \mapsto \mathsf{True}\}$: $\neg \mathsf{True} \equiv \mathsf{False}$
    - $\{r \mapsto \mathsf{False}\}$: $\neg \mathsf{False} \equiv \mathsf{True}$
  - $\{q \mapsto \mathsf{False}\}$: $\mathsf{False} \land \neg r \equiv \mathsf{False}$
- $\{p \mapsto \mathsf{False}\}$: $(\mathsf{False} \to q) \land (\mathsf{False} \land \neg r) \equiv \mathsf{True} \land \mathsf{False} \equiv \mathsf{False}$

d) Wie man in folgendem Baum sehen kann, ist die Formel erfüllbar, aber keine Tautologie.

$$(p \to q) \lor (p \land \neg r)$$

- $\{p \mapsto \mathsf{True}\}$: $(\mathsf{True} \to q) \lor (\mathsf{True} \land \neg r) \equiv q \lor \neg r$
  - $\{q \mapsto \mathsf{True}\}$: $\mathsf{True} \lor \neg r \equiv \mathsf{True}$
  - $\{q \mapsto \mathsf{False}\}$: $\mathsf{False} \lor \neg r \equiv \neg r$
    - $\{r \mapsto \mathsf{True}\}$: $\neg \mathsf{True} \equiv \mathsf{False}$
    - $\{r \mapsto \mathsf{False}\}$: $\neg \mathsf{False} \equiv \mathsf{True}$
- $\{p \mapsto \mathsf{False}\}$: $(\mathsf{False} \to q) \lor (\mathsf{False} \land \neg r) \equiv \mathsf{True} \lor \mathsf{False} \equiv \mathsf{True}$

$\square$

2) *Lösung.* a) Es genügt für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$ zu zeigen, das Gesetz $a + a = a$ folgt

mit dem Dualitätsprinzip. Wir argumentieren wie folgt:

$$a = a1 = a(a + \overline{a}) = aa + a\overline{a} = aa + 0 = aa\ .$$

b) Es genügt für alle $a \in B$: $0 \cdot a = 0$ zu zeigen, das Gesetz $1 + a = 1$ folgt mit dem Dualitätsprinzip. Wir argumentieren wie folgt:

$$0 \cdot a = (\overline{a}a) \cdot a = \overline{a}(aa) = \overline{a}a = 0\ .$$

c) Es genügt für alle $a, b \in B$: $a + ab = b$ und $a + \overline{a}b$ zu zeigen. Die anderen Gesetze folgen mit dem Dualitätsprinzip.

$$\begin{aligned} a &= a1 = a(1 + b) = a + ab \\ a + \overline{a}b &= (a + \overline{a})(a + b) = 1(a + b) = a + b \end{aligned}$$

□

3) *Lösung.*

a)

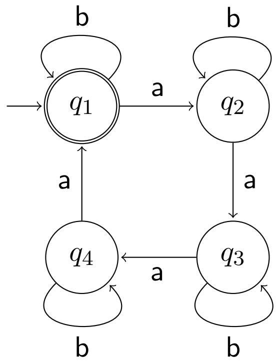
1	$p \to (q \to r)$	Annahme
2	$p \to q$	Annahme
3	p	Annahme
4	$q \to r$	$\to$: e 3,1
5	q	$\to$: e 3,2
6	r	$\to$: e 5,4
7	$p \to r$	$\to$: i 3–6
8	$(p \to q) \to (p \to r)$	$\to$: i 2–7
9	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$\to$: i 1–8

b)

1	$\neg p \to \neg q$	Annahme
2	q	Annahme
3	$\neg p$	Annahme
4	$\neg q$	$\to$: e 3,1
5	False	$\neg$: e 2,4
6	$\neg\neg p$	$\neg$: i 3–5
7	p	$\neg\neg$: e 6
8	$q \to p$	$\to$: i 2–7
9	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$	$\to$: i 1–8

□

4) *Lösung.* – Wir konstruieren den Automaten A sodass $L = L(A)$:



– Grammatik: $G = (\{S, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}, \{a, b\}, R, Q_1)$ mit den Regeln R:

$$\begin{aligned} Q_1 &\to \mathsf{b}Q_1 \mid \mathsf{a}Q_2 \mid \epsilon \\ Q_2 &\to \mathsf{b}Q_2 \mid \mathsf{a}Q_3 \\ Q_3 &\to \mathsf{b}Q_3 \mid \mathsf{a}Q_4 \\ Q_4 &\to \mathsf{b}Q_4 \mid \mathsf{a}Q_1 \end{aligned}$$

□

5) a) Linksableitung: $S \Rightarrow \mathsf{a}B \Rightarrow \mathsf{aa}BB \Rightarrow \mathsf{aab}B \Rightarrow \mathsf{aaba}BB \Rightarrow^* \mathsf{aababb}$

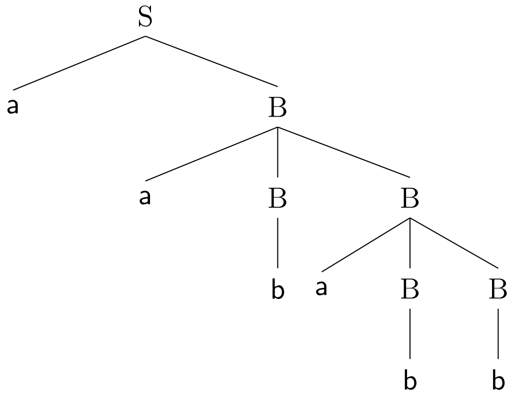
b) Rechtsableitung: $S \Rightarrow \mathsf{a}B \Rightarrow \mathsf{aa}BB \Rightarrow \mathsf{aa}B\mathsf{a}BB \Rightarrow \mathsf{aa}B\mathsf{a}B\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aa}B\mathsf{abb} \Rightarrow \mathsf{aababb}$

c) Nein. Es existieren zum Beispiel mehrere Linksableitungen für x. Zusätzlich zur Variante in a) kann man x noch mit folgender Linksableitung ableiten: $S \Rightarrow \mathsf{a}B \Rightarrow \mathsf{aa}BB \Rightarrow \mathsf{aab}SB \Rightarrow \mathsf{aaba}BB \Rightarrow \mathsf{aababb}$

d)

	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	b	B	$B \to \mathsf{b}$	
2	abb	B	$B \to \mathsf{a}BB$	1
3	ababb	B	$B \to \mathsf{a}BB$	$1, 2$
4	aababb	S	$S \to \mathsf{a}B$	3

e)



6) Die Grammatik G beschreibt die Sprache $\{ab\} \cup \{a^n cb^n | n > 0\}$.

Folgende Turing Maschine M akzeptiert $L(G)$:

$M = (\{s, t, r, v, u, X, Y, Z, H, E\}, \{a, b, c\}, \{\vdash, \sqcup, a, b, c, x\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

δ	$\vdash$	a	b	c	x	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	(v, a, R)	-	-	-	-
v	-	(X, a, L)	(u, b, R)	(X, c, L)	(X, x, L)	$(X, \sqcup, L)$
u	-	(X, a, L)	(X, b, L)	(X, c, L)	(X, x, L)	$+$
X	$(Y, \vdash, R)$	(X, a, L)	(X, b, L)	(X, c, L)	(Y, x, R)	$(X, \sqcup, L)$
Y	-	(Z, x, R)	-	(E, c, R)	(Y, x, R)	-
Z	-	(Z, a, R)	(Z, b, R)	(Z, c, R)	(H, x, L)	$(H, \sqcup, L)$
H	-	-	(X, x, L)	-	-	-
E	-	-	-	-	(E, x, R)	$+$
t	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
r	-	-	-	-	-	-

wobei $- := (r, *, R)$ und $+ := (t, *, R)$.

M kann online[1] simuliert werden:

```
s - - r s
s a a r t

t b b r u
t * * l X

u _ _ r halt-accept
u * * l X

; X = gehe bis zum linken Ende
X - - r Y
X x x r Y
X * * l X
```

[1] https://morphett.info/turing/turing.html?3e73c7613df4d5c91d4d7286cbc477cb

```
; Y = a ersetzen oder mittleres c lesen wenn alle a mit x ersetzt
Y x x r Y
Y a x r Z
Y c c r E

; Z = gehe bis zum rechten Ende
Z a a r Z
Z b b r Z
Z c c r Z
Z x x l H
Z _ _ l H

; H = b ersetzen und zum linken Ende
H b x l X

; E = ueberpruefen ob alle Zeichen nach dem c ersetzt
E x x r E
E _ _ r halt-accept

* * * * halt-reject
```

Wir haben den folgenden Satz in der Vorlesung kennengelernt:

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L rekursiv aufzählbar.

Da unsere TM M die Sprache $L(G)$ akzeptiert, ist $L(G)$ rekursiv aufzählbar.

7) *Lösung.* Um eine IF-THEN-ELSE-Instruktion zu implementieren brauchen wir ein zusätzliches Register x_t. Das Register x_i bedingt die Ausführung von p_1, das Hilfsregister x_t bedingt die Ausführung von p_2. Wir nehmen zu Beginn an, dass $x_i = 0$ und p_2 ausgeführt werden soll. Falls nun doch $x_i > 0$, wird p_1 ausgeführt und x_i sowie x_t werden auf 0 gesetzt. Andernfalls wird p_2 ausgeführt und x_t auf 0 gesetzt.

```
x_t := x_t + 1;
WHILE x_i != 0 DO
  p_1;
  WHILE x_i != 0 DO
    x_i := x_i - 1
  END;
  x_t := x_t - 1
END;
WHILE x_t != 0 DO
  p_2;
  x_t := x_t - 1
END
```

□

8) *Lösung.* Wir geben eine in polynomieller Zeit berechenbare Abbildung $R\colon \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$ an, sodass $x \in A \Leftrightarrow R(x) \in B$. Wir wählen $R(a) = 0$ und $R(b) = 0$. Somit wird ein Wort aus $\{a, b\}^n$ in 0^n umgewandelt. Genau dann wenn n gerade ist, ist 0^n

ein Palindrom gerader Länge. Tabellarisch ergibt sich:

$x \in A$	x	$R(x)$	$R(x) \in B$
✓	ϵ	ϵ	✓
×	a	0	×
×	b	0	×
✓	aa	00	✓
✓	ab	00	✓
✓	ba	00	✓
✓	bb	00	✓
×	aaa	000	×
⋮	⋮	⋮	⋮

□

9) Bestimmen Sie welche der folgenden Aussagen wahr beziehungsweise falsch sind.

Aussage	**Ja**	**Nein**
Eine Formel A ist eine Tautologie genau dann, wenn $\neg A$ erfüllbar ist.	☐	☒
Sei G eine beliebige Grammatik. Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$, dann auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$.	☒	☐
Wenn $M \leq_T L$ und L entscheidbar, dann ist M entscheidbar	☒	☐
NP ist die Klasse der Sprachen, die einen polytime Verifikator haben	☒	☐
Wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L unentscheidbar.	☐	☒