1) Wir beweisen $2^n \geq n+1$ per Induktion über n.

Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, dass $2^0 \geq 0+1$. Dies ist offensichtlich.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Wir nehmen an, dass $2^n \geq n+1$ gilt (Induktionsvoraussetzung).

Wir müssen nun zeigen, dass $2^{n+1} \geq n+2$ gilt und tun dies wie folgt:

$$2^{n+2} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{\geq} 2 \cdot (n+1) = 2n+2 = (n+2)+n \geq n+2$$

2) *Lösung.* a) $A \to \neg B$
   b) $(A \land B) \to C$
   c) $\neg(B \lor C) \to A$
   d) $A \to (\neg B \land \neg C) \to D$

□

3) *Lösung.*
   - $A_1 = (\neg q \lor \neg p) \to q$, dh. die Formel war schon richtig geklammert.
   - $A_2 = (p \to q) \to r$.
   - $A_3 = (p \land (q \to r)) \lor p$ oder $A_3 = p \land ((q \to r) \lor p)$ oder $A_3 = p \land (q \to r \lor p)$.

□

4) Die Formel ist eine Tautologie und somit auch erfüllbar. Beweis:

$$(p \wedge \neg q \to r) \wedge (r \to s \wedge t) \wedge (s \vee t \to \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \to q$$

$$\{q \to \mathsf{True}\}$$

$$\mathsf{True}$$

$$\{q \to \mathsf{False}\}$$

$$(p \wedge \neg\mathsf{False} \to r) \wedge (r \to s \wedge t) \wedge (s \vee t \to \neg r) \wedge (p \vee \mathsf{False} \vee r) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$(p \to r) \wedge (r \to s \wedge t) \wedge (s \vee t \to \neg r) \wedge (p \vee r) \to \mathsf{False}$$

$$\{r \to \mathsf{False}\}$$

$$(p \to \mathsf{False}) \wedge (\mathsf{False} \to s \wedge t) \wedge (s \vee t \to \neg\mathsf{False}) \wedge (p \vee \mathsf{False}) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$(p \to \mathsf{False}) \wedge p \to \mathsf{False}$$

$$\{p \to \mathsf{False}\} \qquad \{p \to \mathsf{True}\}$$

$$\mathsf{True} \qquad \mathsf{True}$$

$$\{r \to \mathsf{True}\}$$

$$(p \to \mathsf{True}) \wedge (\mathsf{True} \to s \wedge t) \wedge (s \vee t \to \neg\mathsf{True}) \wedge (p \vee \mathsf{True}) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{True} \to s \wedge t) \wedge (s \vee t \to \mathsf{False}) \to \mathsf{False}$$

$$\{s \to \mathsf{True}\}$$

$$(\mathsf{True} \to \mathsf{True} \wedge t) \wedge (\mathsf{True} \vee t \to \mathsf{False}) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{True} \to \mathsf{True} \wedge t) \wedge (\mathsf{True} \to \mathsf{False}) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{True} \to \mathsf{True} \wedge t) \wedge \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{True}$$

$$\{s \to \mathsf{False}\}$$

$$(\mathsf{True} \to \mathsf{False} \wedge t) \wedge (\mathsf{False} \vee t \to \mathsf{False}) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{False} \wedge (\mathsf{False} \vee t \to \mathsf{False}) \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{False} \to \mathsf{False}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{True}$$