

1) – Halbgruppe (Semigroup):

Anforderungen an  $\mathcal{A}_1 = \{A, \circ\}$ :

- $\circ$  ist assoziativ

$$\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{N}, +\}$$

□

– Monoid (Monoid):

Anforderungen an  $\mathcal{A}_2 = \{A, \circ, 1\}$ :

- $\mathcal{A}_2$  ist Halbgruppe
- 1 ist neutrales Element bzgl.  $\circ$

$$\mathcal{A}_2 = \{\mathbb{N}, +, 0\}$$

□

– Gruppe (Group):

Anforderungen an  $\mathcal{A}_3 = \{A, \circ, 1\}$ :

- $\mathcal{A}_3$  ist Monoid
- Für jedes Element in  $\mathcal{A}_3$  existiert ein Inverses

$$\mathcal{A}_3 = \{\mathbb{Z}, +, 0\}$$

□

– Ring (Ring):

Anforderungen an  $\mathcal{A}_4 = \{A, +, \cdot, 0, 1\}$ :

- $\{A, +, 0\}$  ist kommutative Gruppe
- $\{A, \cdot, 1\}$  ist Monoid
- $\cdot$  distributiert über  $+$

$$\mathcal{A}_4 = \{\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1\}$$

□

– Körper (Field):

Anforderungen an  $\mathcal{A}_5 = \{A, +, \cdot, 0, 1\}$ :

- $\mathcal{A}_5$  ist Ring
- $\{A, \cdot, 1\}$  ist kommutative Gruppe

$$\mathcal{A}_5 = \{\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1\}$$

□

2) *Lösung.* Teilaufgaben a) und b) lassen sich leicht mit einer Wahrheitstabelle lösen (und, falls erwünscht, Vereinfachung der resultierenden Formeln). Teilaufgabe c) benötigt einen klügeren Ansatz, da die Wahrheitstabelle sehr groß ist.

a) Sowohl KNF als auch DNF:  $p \wedge q$

b) KNF:  $\neg p \wedge (q \vee r)$

DNF:  $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

c) Die Formeln ist bereits in KNF. Die DNF erhält man durch wiederholte Anwendung des Distributivitätsgesetzes  $(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ :

$$(p \wedge r \wedge t) \vee (p \wedge r \wedge u) \vee (p \wedge s \wedge t) \vee (p \wedge s \wedge u) \vee (q \wedge r \wedge t) \vee (q \wedge r \wedge u) \vee (q \wedge s \wedge t) \vee (q \wedge s \wedge u)$$

oder einfacher ausgedrückt

$$\bigvee_{x \in \{p,q\}} \bigvee_{y \in \{r,s\}} \bigvee_{z \in \{t,u\}} (x \wedge y \wedge z)$$

d.h. jedes Tripel  $(x, y, z)$  aus  $\{p, q\} \times \{r, s\} \times \{t, u\}$  führt zu einem Tripel  $x \wedge y \wedge z$  in der DNF.

□

3) *Lösung.*

1	$p \vee q$	Prämisse
2	$p \rightarrow r$	Prämisse
3	$\neg s \rightarrow \neg q$	Prämisse
4	$p$	Annahme
5	$r$	$\rightarrow$ : e 4,2
6	$r \vee s$	$\vee$ : i 5
7	$q$	Annahme
8	$\neg s$	Annahme
9	$\neg q$	$\rightarrow$ : e 8,3
10	<b>False</b>	$\neg$ : e 7,9
11	$\neg\neg s$	$\neg$ : i 8-10
12	$s$	$\neg\neg$ : e 11
13	$r \vee s$	$\vee$ : i 12
14	$r \vee s$	$\vee$ : e 1,4-6,7-13

□