1) *Lösung.*

– Wir zeigen nun, dass $\cap$ über $\cup$ distribuiert (wir wenden lediglich die Definitionen der Vereinigung und des Schnittes an):

Beweis. Sei $A, B, C \subseteq M$ und x ein beliebiges Element in $A \cap (B \cup C)$, dann

$$\begin{aligned} x \in (A \cap (B \cup C)) &\iff x \in A \wedge x \in (B \vee C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \qquad \mid \wedge \text{ distribuiert über } \vee \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \end{aligned}$$

Also distribuiert $\cap$ über $\cup$. □

Der Fall, dass $\cup$ über $\cap$ distribuiert ist analog zu diesem Beweis.

– $\langle \mathcal{P}(M), \cap, M \rangle$ ist ein kommutatives Monoid, wenn $\langle \mathcal{P}(M), \cap \rangle$ eine Halbgruppe, $\cap$ kommutativ und M das neutrale Element für $\cap$ ist.

Wir zeigen zuerst, dass $\cap$ assoziativ ist:

Beweis. Sei $A, B, C \subseteq M$ und x ein beliebiges Element in $A \cap (B \cap C)$, dann

$$\begin{aligned} x \in (A \cap (B \cap C)) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cap C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \qquad \mid \wedge \text{ ist assoziativ} \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ &\iff x \in ((A \cap B) \cap C) \end{aligned}$$

Da dies für jedes beliebige Element gilt, wissen wir, dass $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und dadurch folgt Assoziativität von $\cap$. □

Folglich ist $\langle M, \cap \rangle$ eine Halbgruppe.

Als nächstes zeigen wir, dass $\cap$ kommutativ ist:

Beweis. Sei $A, B \subseteq M$ und x ein beliebiges Element in $A \cap B$, dann

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) &\iff x \in A \wedge x \in B \qquad \mid \wedge \text{ ist kommutativ} \\ &\iff x \in B \wedge x \in A \\ &\iff x \in (B \cap A) \end{aligned}$$

Dadurch folgt Kommutativität von $\cap$. □

Nun fehlt nur noch zu zeigen, dass M das neutrale Element von $\cap$ ist.

Beweis. Sei $A \subseteq M$ und x ein beliebiges Element in $A \cap M$, dann

$$\begin{aligned} x \in (A \cap M) &\iff x \in A \wedge x \in M \qquad \mid A \subseteq M \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Durch Kommutativität von $\cap$ gilt ebenfalls $M \cap A = A$, also ist M das neutrale Element von $\cap$. □

Dadurch ist $\langle \mathcal{P}(M), \cap, M \rangle$ ein kommutatives Monoid.

□

2) *Lösung.* Wir betrachten die Menge $M = \{a, b, c\}$ und definieren die folgende Abbildung:

$x \in \mathbb{B}^3$	$\varphi(x) \in \mathcal{P}(M)$
$(0,0,0)$	$\varnothing$
$(0,0,1)$	$\{c\}$
$(0,1,0)$	$\{b\}$
$(0,1,1)$	$\{b,c\}$
$(1,0,0)$	$\{a\}$
$(1,0,1)$	$\{a,c\}$
$(1,1,0)$	$\{a,b\}$
$(1,1,1)$	M

Die Abbildung φ is offensichtlich bijektiv und die Homomorphiebedingungen lassen sich leicht nachrechnen. Etwa gilt nach Definition für beliebige $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{B}^3$:

$$\varphi(\overline{x}) \cap \varphi(\overline{y}) = \varphi(\overline{x} \cdot \overline{y}) \ .$$

□

3) Wir überprüfen hierfür folgende fehlenden Eigenschaften, siehe Definition 2.7 des Skriptums.

   2) Wir zeigen nun dass die Operationen $+$ und $\cdot$ distributieren. Fixieren wir hierfür beliebige $a, b, c \in \mathbb{B}^n$, d.h. a, b und c haben die Gestalt $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ und $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Da die Binäre Algebra eine Boolesche Algebra definiert wissen wir dass

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a_1 \cdot (b_1 + c_1), \ldots, a_n \cdot (b_n + c_n)) \\ &= ((a_1 \cdot b_1) + (a_1 \cdot c_1), \cdots, (a_n \cdot b_n) + (a_n \cdot c_n)) \\ &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \ , \end{aligned}$$

   gilt. Orthogonal dazu wird $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ gezeigt.

3) Schlussendlich zeigen wir die Eigenschaften bezüglich des Komplements. Fixieren wir $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$. Aufgrund der entsprechenden Eigenschaften der Binären Algebra erhalten wir

$$a + {\sim}(a) = (a_1 + {\sim}(a_1), \ldots, a_n + {\sim}(a_n)) = (1, \ldots, 1) ,$$

und

$$a \cdot {\sim}(a) = (a_1 \cdot {\sim}(a_1), \ldots, a_n \cdot {\sim}(a_n)) = (0, \ldots, 0) ,$$

wie gewünscht.

4) *Lösung.*

a) Korrekt.

$$\begin{aligned}
&({\sim}(p \cdot q) + p + q) \cdot r \\
&= ({\sim}(p) + {\sim}(q) + p + q) \cdot r && \text{de Morgan} \\
&= \big((p + {\sim}(p)) + (q + {\sim}(q))\big) \cdot r && \text{Kommutativität/Assoziativität von } + \\
&= (1 + 1) \cdot r && \text{Komplementgesetze für } + \\
&= r
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch den Darstellungssatz von Stone ausnutzen und zeigen, dass die aussagenlogischen Formeln $(\neg(p \wedge p) \wedge p \vee p) \wedge r$ und r äquivalent sind, z.B. durch eine Wahrheitstabelle.

b) Korrekt. Dies folgt aus a) mit dem Dualitätsprinzip.

$\square$