1) *Lösung.*

a)

$$L^3 = LLL = \{xyz \mid x, y, z \in L\} =$$
$\{$ababab, ababba, abababaa, ababbb, abbaab, abbaba, abbaaaa, abbabb, abaaaab, abaaaba, abaaaaaa, abaaabb, abbbab, abbbba, abbbaaa, abbbbb, baabab, baabba, baabaaa, baabbb, babaab, bababa, babaaaa, bababb, baaaaab, baaaaba, baaaaaaa, baaaabb, babbab, babbba, babbaaa, babbbb, aaaabab, aaaabba, aaaabaaa, aaaabbb, aaabaab, aaababa, aaabaaaa, aaababb, aaaaaaab, aaaaaaba, aaaaaaaaa, aaaaaabb, aaabbab, aaabbba, aaabbaaa, aaabbbb, bbabab, bbabba, bbabaaa, bbabbb, bbbaab, bbbaba, bbbaaaa, bbbabb, bbaaaab, bbaaaba, bbaaaaaa, bbaaabb, bbbbab, bbbbba, bbbbaaa, bbbbbb$\}$

$$ML = \{\mathsf{ab}, \mathsf{ba}, \mathsf{aaa}, \mathsf{bb}, \mathsf{aab}, \mathsf{aba}, \mathsf{aaaa}, \mathsf{abb}, \mathsf{bab}, \mathsf{bba}, \mathsf{baaa}, \mathsf{bbb}\}$$

$$L\varnothing = \{xy \mid x \in L \text{ und } y \in \varnothing\} = \varnothing$$

b) $L \cap M = \varnothing$, $M \cup N = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \geq 0\}$

c) $N = \{\epsilon\}$.

□

2) *Lösung.* a) $(()(())())$

$$S \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S) \Rightarrow ((S)S) \Rightarrow (()S) \Rightarrow (()(S)S) \Rightarrow (()(S)(S)S) \Rightarrow (()((S)S)()) \Rightarrow (()(())())$$

b) $(())(())()))$
Mehr schließende Klammern als öffnende. Geht nicht.

c) Wir erhalten die folgende Ableitung:

$$S \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S)S \Rightarrow ()(S)S \Rightarrow ()((S)S)S \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ()(()S)S \Rightarrow ()(()(S)S)S \Rightarrow ()(()(S)S) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ()(()(S)) \Rightarrow ()(()((S)S)) \Rightarrow ()(()((S))) \Rightarrow ()(()(())) \,.$$

d) $(()())())$
Ungerade Zahl an Klammern. Geht nicht.

□

3) *Lösung.*

a)
- G_1 ist kontextfrei, kontextsensitiv und beschränkt.
- $L(G_1) = \{\mathsf{c}^i\mathsf{b}^j \mid i > j\}$.
- Da G_1 kontextfrei ist, ist $L(G_1)$ zumindest vom Typ 2. Tatsächlich gibt es keine rechtslineare Grammatik für $L(G_1)$, also ist $L(G_1)$ nicht vom Typ 3.

b)
- G_2 ist ebenfalls kontextfrei, kontextsensitiv und beschränkt.
- $L(G_2) = \{\mathsf{a}^i\mathsf{ba}^i\mathsf{a} \mid i \geq 0\} \cup \{\mathsf{c}\}$.
- Da G_2 kontextfrei ist, ist $L(G_2)$ zumindest vom Typ 2. Man kann allerdings keine rechtslineare Grammatik finden, also ist $L(G_2)$ nicht vom Typ 3.

c)
- G_3 erfüllt keine der Eigenschaften (i)-(iv). Es ist nicht beschränkt, weil $T \to \epsilon$ und T in der Konklusion vorkommt.
- $L(G_3) = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \cup \{\epsilon, \mathsf{c}\}$.
- Aus der Grammatik kann man nur schließen, dass $L(G_3)$ rekursive aufzählbar (vom Typ 0) ist. Man kann aber eine rechtslineare Grammatik G_3' für $L(G_3)$ finden, damit ist $L(G_3)$ vom Typ 3.

  Definition von $G_3' = (\{T\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R', T)$ mit den Regeln R':

  $$T \to \epsilon \mid \mathsf{c} \mid \mathsf{a}T \mid \mathsf{b}T$$

  G_3' ist rechtslinear, kontextfrei, kontextsensitiv und beschränkt.

d)
- G_4 ist nur kontextfrei.
- $L(G_4) = \{\epsilon\}$.
- Da G_4 kontextfrei ist, ist $L(G_4)$ zumindest vom Typ 2. Man sieht leicht, dass es auch eine rechtslineare Grammatik G_4' für $L(G_4)$ gibt ($\implies$ Typ 3).

  Definition von $G_4' = (\{S\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R', S)$ mit den Regeln R':

  $$S \to \epsilon\ .$$

  G_4' ist rechtslinear.

$\square$