Selected Solutions 5 November 18, 2022

1 a)

- $x = y \wedge y = z \wedge x \neq w$ is EQ-satisfiable.
  For instance, take the model $\mathcal{M}$ with carrier $A = \{0,1\}$ and where $=^{\mathcal{M}}$ is interpreted as equality (i.e., $=^{\mathcal{M}} = \{(0,0),(1,1)\}$); together with the environment $l(x) = l(y) = l(z) = 0$ and $l(w) = 1$.
- $x = y \wedge y = z \wedge x \neq w \wedge w = z$ is not EQ-satisfiable, because by transitivity and symmetry $x = y$ and $y = z$ and $w = z$ imply $x = w$.
- $\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a})) \wedge \neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))$ is not EUF-satisfiable, intuitively because $\mathsf{a} = \mathsf{b}$ implies $\mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{b})$, so $P(\mathsf{f}(\mathsf{a}))$ implies $\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))$.
- $\mathsf{a} \neq \mathsf{b} \wedge \mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{b} \wedge \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \mathsf{b}$ is EUF-satisfiable.
  For instance, take the model $\mathcal{M}$ with carrier $A = \{0,1\}$ and where $=^{\mathcal{M}}$ is interpreted as equality, $\mathsf{a}^{\mathcal{M}}(x) = 0$, $\mathsf{b}^{\mathcal{M}}(x) = 1$, $\mathsf{f}^{\mathcal{M}}(x) = 1 - x$, and $\mathsf{g}^{\mathcal{M}}(x,y) = y$.

b)

- $x = y \wedge y = z \wedge x \neq w \vDash_{\mathsf{EQ}} w \neq z$ holds because $x = y \wedge y = z \wedge x \neq w \wedge w = z$ is EQ-unsatisfiable: intuitively, by transitivity and symmetry, the three equations imply $x = w$.
- $x \neq y \wedge y \neq z \vDash_{\mathsf{EQ}} x \neq z$ does not hold because $x \neq y \wedge y \neq z \wedge x = z$.
  For instance, take the model $\mathcal{M}$ with carrier $A = \{0,1\}$ and where $=^{\mathcal{M}}$ is interpreted as equality (i.e., $=^{\mathcal{M}} = \{(0,0),(1,1)\}$); together with the environment $l(x) = l(z) = 0$ and $l(y) = 1$.
- $\mathsf{a} = \mathsf{f}(\mathsf{a}) \wedge \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{a}) \vDash_{\mathsf{EUF}} \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))))$ holds because $\mathsf{a} = \mathsf{f}(\mathsf{a}) \wedge \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{a}) \wedge \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}),\mathsf{b}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))))$ is unsatisfiable. Intuitively, $\mathsf{a} = \mathsf{f}(\mathsf{a})$ implies $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))) = \mathsf{a}$, so $\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{a})$ implies $\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}),\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{a}))))$.
- $\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge \mathsf{f}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \vDash_{\mathsf{EUF}} \mathsf{f}(\mathsf{b}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})$ holds as $\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge \mathsf{f}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \wedge \mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})$ is unsatisfiable.
- $\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge \mathsf{f}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \equiv_{\mathsf{EUF}} \mathsf{f}(\mathsf{b}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})$ does not hold: The entailment from left to right holds (see above), but $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \vDash_{\mathsf{EUF}} \mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge \mathsf{f}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{b})$ does not, i.e., $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \wedge (\mathsf{a} \neq \mathsf{b} \vee \mathsf{f}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{b}))$ is satisfiable. For instance, $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \neq \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \wedge \mathsf{a} \neq \mathsf{b}$ is satisfied by the model $\mathcal{M}$ with carrier $A = \{0,1\}$ and where $=^{\mathcal{M}}$ is interpreted as equality $\mathsf{a}^{\mathcal{M}}(x) = 0$, $\mathsf{b}^{\mathcal{M}}(x) = 1$, $\mathsf{f}^{\mathcal{M}}(x) = 0$, and $\mathsf{g}^{\mathcal{M}}(x,y) = 1$.

2 (a) For the abbreviations

$$\underbrace{\mathsf{a} = \mathsf{b}}_{1} \wedge (\underbrace{\mathsf{b} = \mathsf{c}}_{2} \vee \underbrace{\mathsf{b} = \mathsf{d}}_{3}) \wedge (\neg(\underbrace{\mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{c})}_{4} \vee \neg(\underbrace{\mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{b})}_{5})) \wedge \neg(\underbrace{\mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{f}(\mathsf{d})}_{6})$$

the propositional skeleton is $\varphi := 1 \wedge (2 \vee 3) \wedge (\overline{4} \vee \overline{5}) \wedge \overline{6}$. The following DPLL($T$) sequence shows unsatisfiability:

$$\begin{aligned}
\parallel \varphi &\Longrightarrow 1 \parallel \varphi && \textsf{unit propagate}\\
&\Longrightarrow 1\,\overline{6} \parallel \varphi && \textsf{unit propagate}\\
&\Longrightarrow 1\,\overline{6}\,5 \parallel \varphi && T\textsf{-propagate } 1 \vDash_{\mathsf{EUF}} 5\\
&\Longrightarrow 1\,\overline{6}\,5\,\overline{4} \parallel \varphi && \textsf{unit propagate}\\
&\Longrightarrow 1\,\overline{6}\,5\,\overline{4}\,\overline{3} \parallel \varphi && T\textsf{-propagate } \overline{6} \vDash_{\mathsf{EUF}} \overline{3}\\
&\Longrightarrow 1\,\overline{6}\,5\,\overline{4}\,\overline{3}\,2 \parallel \varphi && \textsf{unit propagate}\\
&\Longrightarrow 1\,\overline{6}\,5\,\overline{4}\,\overline{3}\,2 \parallel \varphi, C && T\textsf{-learn}\\
&\Longrightarrow \mathsf{FailState} && \textsf{fail}
\end{aligned}$$

In the T-learn step, the current literal list is recognized to be EUF-unsatisfiable, so the clause $C = \overline{1} \vee 6 \vee \overline{5} \vee 4 \vee 3 \vee \overline{2}$ negating the assignment is added. A smaller clause that works would be $C' = \overline{1} \vee \overline{2} \vee 4$.

(b) For the abbreviations

$$\underbrace{\mathsf{f(b) = g(f(a), b)}}_{1} \wedge \underbrace{\mathsf{f(f(a)) = g(b, b)}}_{2} \wedge (\underbrace{\mathsf{f(a) = a}}_{3} \vee \underbrace{\mathsf{f(a) = b}}_{4}) \wedge \underbrace{\mathsf{g(a, b) = b}}_{5} \wedge$$
$$(\neg(\underbrace{\mathsf{f(b) = b}}_{6}) \vee \neg(\underbrace{\mathsf{f(g(a, b)) = g(b, b}}_{7}))$$

the propositional skeleton is $1 \wedge 2 \wedge (3 \vee 4) \wedge 5 \vee (\overline{6} \vee \overline{7})$. The following DPLL($T$) sequence shows satisfiability:

$$\begin{aligned}
\parallel \varphi &\Longrightarrow^* 1\,2\,5 \parallel \varphi && \textsf{unit propagate}\\
&\Longrightarrow 1\,2\,5\,3^d \parallel \varphi && \textsf{decide}\\
&\Longrightarrow 1\,2\,5\,3^d\,6 \parallel \varphi && T\textsf{-propagate } 1 \wedge 3 \wedge 5 \vDash_{\mathsf{EUF}} 6\\
&\Longrightarrow 1\,2\,5\,3^d\,6\,\overline{7} \parallel \varphi && \textsf{unit propagate}
\end{aligned}$$

and it can be checked that the resulting assignment is EUF-satisfiable: For instance, take the model $\mathcal{M}$ with carrier $A = \{0, 1\}$ and where $=^{\mathcal{M}}$ is interpreted as equality, $\mathsf{a}^{\mathcal{M}}(x) = 0$, $\mathsf{b}^{\mathcal{M}}(x) = 1$, $\mathsf{f}^{\mathcal{M}}(x) = x$, and $\mathsf{g}^{\mathcal{M}}(x, y) = 1 - x$.

$\boxed{3}$ See `appetizers.py`.

$\boxed{4}$ See `matching.py`.