Exercises

1. Study the slides.

2. Prove that the TRS consisting of the three rewrite rules

$$\mathsf{f}(x) \otimes \mathsf{f}(y) \to \mathsf{f}(x \otimes y) \qquad \mathsf{f}(x) \otimes (\mathsf{f}(y) \otimes z) \to \mathsf{f}(x \otimes y) \otimes z \qquad (x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$$

is polynomially terminating.

⋆3. Is the TRS consisting of the six rewrite rules

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{0} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{0}) \\ \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) &\to \mathsf{s}(\mathsf{0}) & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) &\to \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) \\ \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))))) & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))))))) &\to \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \end{aligned}$$

polynomially terminating?

4. Consider the TRS $\mathcal{R}$ consisting of the two rewrite rules

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \mathsf{f}(\mathsf{b}) \qquad \mathsf{g}(\mathsf{b}) \to \mathsf{g}(\mathsf{a})$$

   (a) Prove that $\mathcal{R}$ is not polynomially terminating.
   (b) Prove the termination of $\mathcal{R}$ by constructing a suitable well-founded monotone algebra.

5. Can the termination of the TRSs of exercises 2 and 4 be shown using LPO?

6. Show that $s >_{\mathsf{lpo}} t$ whenever $s \rhd t$, for any precedence $>$.

7. Show the termination of the TRS consisting of the two rewrite rules

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(x)), y) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x, y)) \qquad \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{g}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, x), \mathsf{f}(y, y))$$

using LPO.

⋆8. Is the SRS consisting of the rewrite rules

terminating?

9. Determine most general unifiers of the following pairs of terms, if possible.
   (a) $\mathsf{f}(\mathsf{g}(x, y), x, y)$ and $\mathsf{f}(z, \mathsf{g}(y, y), y)$
   (b) $\mathsf{g}(\mathsf{h}(x), \mathsf{g}(x, y))$ and $\mathsf{g}(z, \mathsf{g}(\mathsf{g}(x, x), z))$
   (c) $\mathsf{f}(x, \mathsf{g}(x, y), \mathsf{h}(y))$ and $\mathsf{f}(\mathsf{g}(z, z), x, x)$

10. Consider the TRS $\mathcal{R}$ consisting of the rewrite rules

$$\begin{aligned} \mathsf{0} + y &\to y & \mathsf{0} \times y &\to \mathsf{0} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) &\to x \\ \mathsf{s}(x) + y &\to \mathsf{s}(x + y) & \mathsf{s}(x) \times y &\to (x \times y) + y \end{aligned}$$

   (a) Prove that $\mathcal{R}$ is terminating.
   (b) Compute the critical pairs of $\mathcal{R}$.
   (c) Complete $\mathcal{R}$.

11. Complete the TRS consisting of the rewrite rules

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{g}(x) \qquad\qquad \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \to \mathsf{f}(x)$$

12. Compute the critical pairs of the SRS consisting of the rewrite rules

$$\mathsf{TCAT} \to \mathsf{T} \qquad \mathsf{GAG} \to \mathsf{AG} \qquad \mathsf{CTC} \to \mathsf{TC} \qquad \mathsf{AGTA} \to \mathsf{A} \qquad \mathsf{TAT} \to \mathsf{CT}$$