Uncurrying for Innermost Termination and Derivational Complexity

Nao Hirokawa[†] Aart Middeldorp[‡] **Harald Zankl**[‡]

[†] School of Information Science
Japan Advanced Institute of Science and Technology, Japan

[‡]Institute of Computer Science
University of Innsbruck, Austria

HOR 2010 (Edinburgh) 14 July 2010

Applicative Rewrite Systems (ARSs)

Example (Functional Form)

$$
\begin{aligned}
\circ(\mathsf{id}, x) &\to x \\
\circ(\mathsf{add}, \mathsf{0}) &\to \mathsf{id} \\
\circ(\circ(\mathsf{add}, \circ(\mathsf{s}, x)), y) &\to \circ(\mathsf{s}, \circ(\circ(\mathsf{add}, x), y)) \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \circ(\circ(:, x, y))) &\to \circ(\circ(:, \circ(f, x), \circ(\circ(\mathsf{map}, f), y)))
\end{aligned}
$$

Applicative Rewrite Systems (ARSs)

Example (Functional Form)

$$
\begin{aligned}
\circ(\mathsf{id}, x) &\to x \\
\circ(\mathsf{add}, \mathsf{0}) &\to \mathsf{id} \\
\circ(\circ(\mathsf{add}, \circ(\mathsf{s}, x)), y) &\to \circ(\mathsf{s}, \circ(\circ(\mathsf{add}, x), y)) \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \circ(\circ(:, x, y))) &\to \circ(\circ(:, \circ(f, x), \circ(\circ(\mathsf{map}, f), y)))
\end{aligned}
$$

Applicative Rewrite Systems (ARSs)

Example (Functional Form)

$$
\begin{aligned}
\circ(\mathsf{id}, x) &\to x \\
\circ(\mathsf{add}, \mathsf{0}) &\to \mathsf{id} \\
\circ(\circ(\mathsf{add}, \circ(\mathsf{s}, x)), y) &\to \circ(\mathsf{s}, \circ(\circ(\mathsf{add}, x), y)) \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \circ(\circ(:, x, y))) &\to \circ(\circ(:, \circ(f, x), \circ(\circ(\mathsf{map}, f), y)))
\end{aligned}
$$

Applicative Rewrite Systems (ARSs)

Example (Functional Form)

$$\circ(\mathsf{id}, x) \to x$$
$$\circ(\mathsf{add}, 0) \to \mathsf{id}$$
$$\circ(\circ(\mathsf{add}, \circ(\mathsf{s}, x)), y) \to \circ(\mathsf{s}, \circ(\circ(\mathsf{add}, x), y))$$
$$\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \mathsf{nil}) \to \mathsf{nil}$$
$$\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \circ(\circ(:, x, y))) \to \circ(\circ(:, \circ(f, x), \circ(\circ(\mathsf{map}, f), y)))$$

Example (Applicative Form)

$$\mathsf{id}\; x \to x$$
$$\mathsf{add}\; 0 \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{add}\; (\mathsf{s}\; x)\; y \to \mathsf{s}\; (\mathsf{add}\; x\; y)$$
$$\mathsf{map}\; f\; \mathsf{nil} \to \mathsf{nil} \qquad \mathsf{map}\; f\; (:\; x\; y) \to :\; (f\; x)\; (\mathsf{map}\; f\; y)$$

Applicative Rewrite Systems (ARSs)

Example (Functional Form)

$$\begin{aligned}
\circ(\mathsf{id}, x) &\to x \\
\circ(\mathsf{add}, \mathsf{0}) &\to \mathsf{id} \\
\circ(\circ(\mathsf{add}, \circ(\mathsf{s}, x)), y) &\to \circ(\mathsf{s}, \circ(\circ(\mathsf{add}, x), y)) \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\
\circ(\circ(\mathsf{map}, f), \circ(\circ(:, x, y))) &\to \circ(\circ(:, \circ(f, x), \circ(\circ(\mathsf{map}, f), y)))
\end{aligned}$$

Example (Applicative Form)

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}\, x &\to x \\
\mathsf{add}\, \mathsf{0} &\to \mathsf{id} & \mathsf{add}\,(\mathsf{s}\, x)\, y &\to \mathsf{s}\,(\mathsf{add}\, x\, y) \\
\mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} & \mathsf{map}\, f\,(:\, x\, y) &\to :\,(f\, x)\,(\mathsf{map}\, f\, y)
\end{aligned}$$

Remark

assume left head-variable free systems

Motivation

- ARSs vs. functional programming

Motivation

- ARSs vs. functional programming
- termination of ARSs hard to show

Motivation

- ARSs vs. functional programming
- termination of ARSs hard to show $\longrightarrow$ Uncurrying

Motivation

- ARSs vs. functional programming
- termination of ARSs hard to show $\longrightarrow$ Uncurrying
- innermost termination is easier

Motivation

- ARSs vs. functional programming
- termination of ARSs hard to show $\longrightarrow$ Uncurrying
- innermost termination is easier $\longrightarrow$ OCaml (eager evaluation)

Motivation

- ARSs vs. functional programming
- termination of ARSs hard to show $\longrightarrow$ Uncurrying
- innermost termination is easier $\longrightarrow$ OCaml (eager evaluation)
- derivational complexity vs. computational complexity

Overview

- Uncurrying
- Innermost Termination
- Derivational Complexity
  - Full Rewriting
  - Innermost Rewriting

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\; x \to x \qquad \mathsf{map}\; f\; \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$

$$\mathsf{add}\; 0 \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{map}\; f\; (:\; x\; y) \to \;:\; (f\; x)\; (\mathsf{map}\; f\; y)$$

$$\mathsf{add}\; (\mathsf{s}\; x)\; y \to \mathsf{s}\; (\mathsf{add}\; x\; y)$$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\ x &\to x \\ \mathsf{add}\ 0 &\to \mathsf{id} \\ \mathsf{add}\ (\mathsf{s}\ x)\ y &\to \mathsf{s}\ (\mathsf{add}\ x\ y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{map}\ f\ \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{map}\ f\ (:\ x\ y) &\to\ :\ (f\ x)\ (\mathsf{map}\ f\ y) \end{aligned}$$

$\mathrm{aa}(\mathsf{id}) =$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\; x \to x$$
$$\mathsf{add}\; 0 \to \mathsf{id}$$
$$\mathsf{add}\; (\mathsf{s}\; x)\; y \to \mathsf{s}\; (\mathsf{add}\; x\; y)$$

$$\mathsf{map}\; f\; \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$
$$\mathsf{map}\; f\; (:\; x\; y) \to\; :\; (f\; x)\; (\mathsf{map}\; f\; y)$$

$\mathrm{aa}(\mathsf{id}) = 1$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\ x \to x \qquad \mathsf{map}\ f\ \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$

$$\mathsf{add}\ 0 \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{map}\ f\ (:\ x\ y) \to\ :\ (f\ x)\ (\mathsf{map}\ f\ y)$$

$$\mathsf{add}\ (\mathsf{s}\ x)\ y \to \mathsf{s}\ (\mathsf{add}\ x\ y)$$

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) =$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\, x \to x \qquad \mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$

$$\mathsf{add}\, 0 \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{map}\, f\, (:\, x\, y) \to :\, (f\, x)\, (\mathsf{map}\, f\, y)$$

$$\mathsf{add}\, (\mathsf{s}\, x)\, y \to \mathsf{s}\, (\mathsf{add}\, x\, y)$$

$\mathrm{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathrm{aa}(\mathsf{add}) = 2$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\, x \to x \qquad \mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$
$$\mathsf{add}\, \mathsf{0} \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{map}\, f\, (\mathsf{:}\, x\, y) \to \mathsf{:}\, (f\, x)\, (\mathsf{map}\, f\, y)$$
$$\mathsf{add}\, (\mathsf{s}\, x)\, y \to \mathsf{s}\, (\mathsf{add}\, x\, y)$$

$\mathrm{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathrm{aa}(\mathsf{add}) = 2 \qquad \ldots$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\; x &\to x \\ \mathsf{add}\; 0 &\to \mathsf{id} \\ \mathsf{add}\; (\mathsf{s}\; x)\; y &\to \mathsf{s}\; (\mathsf{add}\; x\; y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{map}\; f\; \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{map}\; f\; (:\; x\; y) &\to\; :\; (f\; x)\; (\mathsf{map}\; f\; y) \end{aligned}$$

$\mathrm{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathrm{aa}(\mathsf{add}) = 2 \qquad \ldots \qquad \mathrm{aa}(f) =$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\; x \to x \qquad \mathsf{map}\; f\; \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$
$$\mathsf{add}\; 0 \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{map}\; f\; (:\, x\; y) \to\; :\, (f\; x)\; (\mathsf{map}\; f\; y)$$
$$\mathsf{add}\; (\mathsf{s}\; x)\; y \to \mathsf{s}\; (\mathsf{add}\; x\; y)$$

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = 2 \qquad \ldots \qquad \mathsf{aa}(f) = \bot$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\, x &\to x & \mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{add}\, 0 &\to \mathsf{id} & \mathsf{map}\, f\, (:\, x\, y) &\to\, :\, (f\, x)\, (\mathsf{map}\, f\, y) \\ \mathsf{add}\, (\mathsf{s}\, x)\, y &\to \mathsf{s}\, (\mathsf{add}\, x\, y) \end{aligned}$$

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = 2 \qquad \ldots \qquad \mathsf{aa}(f) = \bot$

Definition (Applicative Arity (2))

$$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t) = \begin{cases} \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) & \text{if } t = f \\ \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t_1) - 1 & \text{if } t = t_1 \circ t_2 \end{cases}$$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\mathsf{id}\ x \to x \qquad \mathsf{map}\ f\ \mathsf{nil} \to \mathsf{nil}$$
$$\mathsf{add}\ 0 \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{map}\ f\ (:\ x\ y) \to\ :\ (f\ x)\ (\mathsf{map}\ f\ y)$$
$$\mathsf{add}\ (\mathsf{s}\ x)\ y \to \mathsf{s}\ (\mathsf{add}\ x\ y)$$

$\mathrm{aa}(\mathsf{id}) = 1 \qquad \mathrm{aa}(\mathsf{add}) = 2 \qquad \ldots \qquad \mathrm{aa}(f) = \bot$

$\mathrm{aa}(\mathsf{add}\ 0) = 1$

Definition (Applicative Arity (2))

$$\mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(t) = \begin{cases} \mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f) & \text{if } t = f \\ \mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(t_1) - 1 & \text{if } t = t_1 \circ t_2 \end{cases}$$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\, x &\to x \\ \mathsf{add}\, 0 &\to \mathsf{id} \\ \mathsf{add}\,(\mathsf{s}\, x)\, y &\to \mathsf{s}\,(\mathsf{add}\, x\, y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{map}\, f\,(:\, x\, y) &\to \,:\,(f\, x)\,(\mathsf{map}\, f\, y) \end{aligned}$$

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = 2 \quad \ldots \quad \mathsf{aa}(f) = \bot$

$\mathsf{aa}(\mathsf{add}\, 0) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}\, 0\, x) = 0$

Definition (Applicative Arity (2))

$$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t) = \begin{cases} \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) & \text{if } t = f \\ \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t_1) - 1 & \text{if } t = t_1 \circ t_2 \end{cases}$$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\, x &\to x & \mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{add}\, 0 &\to \mathsf{id} & \mathsf{map}\, f\, (:\, x\, y) &\to\, :\, (f\, x)\, (\mathsf{map}\, f\, y) \\ \mathsf{add}\, (\mathsf{s}\, x)\, y &\to \mathsf{s}\, (\mathsf{add}\, x\, y) \end{aligned}$$

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = 1$ $\mathsf{aa}(\mathsf{add}) = 2$ $\ldots$ $\mathsf{aa}(f) = \bot$

$\mathsf{aa}(\mathsf{add}\, 0) = 1$ $\mathsf{aa}(\mathsf{add}\, 0\, x) = 0$ $\mathsf{aa}(\mathsf{add}\, 0\, x\, \mathsf{nil}) = -1$

Definition (Applicative Arity (2))

$$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t) = \begin{cases} \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) & \text{if } t = f \\ \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t_1) - 1 & \text{if } t = t_1 \circ t_2 \end{cases}$$

Uncurrying

Definition (Applicative Arity)

$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) = \max\{n \mid f \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n \text{ subterm in } \mathcal{R}, f \in \mathcal{F}\}$

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\ x &\to x & \mathsf{map}\ f\ \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{add}\ 0 &\to \mathsf{id} & \mathsf{map}\ f\ (:\ x\ y) &\to\ :\ (f\ x)\ (\mathsf{map}\ f\ y) \\ \mathsf{add}\ (\mathsf{s}\ x)\ y &\to \mathsf{s}\ (\mathsf{add}\ x\ y) \end{aligned}$$

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = 2 \quad \ldots \quad \mathsf{aa}(f) = \bot$

$\mathsf{aa}(\mathsf{add}\ 0) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}\ 0\ x) = 0 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}\ 0\ x\ \mathsf{nil}) = -1 \quad \ldots$

Definition (Applicative Arity (2))

$$\mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t) = \begin{cases} \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f) & \text{if } t = f \\ \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(t_1) - 1 & \text{if } t = t_1 \circ t_2 \end{cases}$$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$)

$$\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}) = \{f_i(x_1, \ldots, x_i) \circ y \to f_{i+1}(x_1, \ldots, x_i, y) \mid 0 \leqslant i < \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}$)

$\mathcal{U} \quad = \{f_i(x_1, \ldots, x_i) \circ y \to f_{i+1}(x_1, \ldots, x_i, y) \mid 0 \leqslant i < \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}$)

$\mathcal{U} \quad = \{f_i(x_1, \ldots, x_i) \circ y \rightarrow f_{i+1}(x_1, \ldots, x_i, y) \mid 0 \leqslant i < \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$

Example

$\mathsf{aa}(0) = \mathsf{aa}(\mathsf{nil}) = 0 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{id}) = \mathsf{aa}(\mathsf{s}) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = \mathsf{aa}(\mathsf{map}) = \mathsf{aa}(:) = 2$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}$)

$$\mathcal{U} = \{f_i(x_1, \ldots, x_i) \circ y \to f_{i+1}(x_1, \ldots, x_i, y) \mid 0 \leqslant i < \mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$$

Example

$\mathrm{aa}(0) = \mathrm{aa}(\mathrm{nil}) = 0 \quad \mathrm{aa}(\mathrm{id}) = \mathrm{aa}(\mathrm{s}) = 1 \quad \mathrm{aa}(\mathrm{add}) = \mathrm{aa}(\mathrm{map}) = \mathrm{aa}(:) = 2$

$$\mathrm{id}_0 \circ x \to \mathrm{id}_1(x) \qquad \mathrm{s}_0 \circ x \to \mathrm{s}_1(x)$$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}$)

$$\mathcal{U} \quad = \{f_i(x_1, \ldots, x_i) \circ y \to f_{i+1}(x_1, \ldots, x_i, y) \mid 0 \leqslant i < \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$$

Example

$\mathsf{aa}(0) = \mathsf{aa}(\mathsf{nil}) = 0 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{id}) = \mathsf{aa}(\mathsf{s}) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = \mathsf{aa}(\mathsf{map}) = \mathsf{aa}(:) = 2$

$$\begin{aligned} \mathsf{id}_0 \circ x &\to \mathsf{id}_1(x) & \mathsf{s}_0 \circ x &\to \mathsf{s}_1(x) \\ \mathsf{add}_0 \circ x &\to \mathsf{add}_1(x) & \mathsf{add}_1(x) \circ y &\to \mathsf{add}_2(x, y) \\ \mathsf{map}_0 \circ x &\to \mathsf{map}_1(x) & \mathsf{map}_1(x) \circ y &\to \mathsf{map}_2(x, y) \\ :_0 \circ x &\to :_1(x) & :_1(x) \circ y &\to :_2(x, y) \end{aligned}$$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}$)

$$\mathcal{U} \quad = \{f_i(x_1,\dots,x_i)\circ y \to f_{i+1}(x_1,\dots,x_i,y) \mid 0 \leqslant i < \mathrm{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$$

Example

$\mathrm{aa}(0) = \mathrm{aa}(\mathsf{nil}) = 0 \quad \mathrm{aa}(\mathsf{id}) = \mathrm{aa}(\mathsf{s}) = 1 \quad \mathrm{aa}(\mathsf{add}) = \mathrm{aa}(\mathsf{map}) = \mathrm{aa}(:) = 2$

$$\begin{aligned} \mathsf{id} \circ x &\to \mathsf{id}_1(x) & \mathsf{s} \circ x &\to \mathsf{s}_1(x) \\ \mathsf{add} \circ x &\to \mathsf{add}_1(x) & \mathsf{add}_1(x) \circ y &\to \mathsf{add}_2(x,y) \\ \mathsf{map} \circ x &\to \mathsf{map}_1(x) & \mathsf{map}_1(x) \circ y &\to \mathsf{map}_2(x,y) \\ : \circ x &\to :_1(x) & :_1(x) \circ y &\to :_2(x,y) \end{aligned}$$

Definition (Uncurrying System $\mathcal{U}$)

$$\mathcal{U} = \{f_i(x_1,\ldots,x_i) \circ y \to f_{i+1}(x_1,\ldots,x_i,y) \mid 0 \leqslant i < \mathsf{aa}_{\mathcal{R}}(f), f \in \mathcal{F}\}$$

Example

$\mathsf{aa}(0) = \mathsf{aa}(\mathsf{nil}) = 0 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{id}) = \mathsf{aa}(\mathsf{s}) = 1 \quad \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = \mathsf{aa}(\mathsf{map}) = \mathsf{aa}(:) = 2$

$$\begin{aligned}
\mathsf{id} \circ x &\to \mathsf{id}_1(x) & \mathsf{s} \circ x &\to \mathsf{s}_1(x) \\
\mathsf{add} \circ x &\to \mathsf{add}_1(x) & \mathsf{add}_1(x) \circ y &\to \mathsf{add}_2(x,y) \\
\mathsf{map} \circ x &\to \mathsf{map}_1(x) & \mathsf{map}_1(x) \circ y &\to \mathsf{map}_2(x,y) \\
: \circ x &\to :_1(x) & :_1(x) \circ y &\to :_2(x,y)
\end{aligned}$$

Definition (Uncurried System $\mathcal{R}{\downarrow_{\mathcal{U}}}$)

$$\mathcal{R}{\downarrow_{\mathcal{U}}} = \{l{\downarrow_{\mathcal{U}}} \to r{\downarrow_{\mathcal{U}}} \mid l \to r \in \mathcal{R}\}$$

Definition (η-saturation)

$$\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R} \cup \{l \circ x \to r \circ x \mid l \to r \in \mathcal{R}_\eta, aa(l) > 0\}$$

Definition (η-saturation)

$$\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R} \cup \{l \circ x \to r \circ x \mid l \to r \in \mathcal{R}_\eta, aa(l) > 0\}$$

Example

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = \mathsf{aa}(\mathsf{s}) = 1,\ \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = \mathsf{aa}(\mathsf{map}) = \mathsf{aa}(:) = 2,\ \mathsf{aa}(0) = \mathsf{aa}(\mathsf{nil}) = 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\,x &\to x & \mathsf{map}\,f\,\mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{add}\,0 &\to \mathsf{id} & \mathsf{map}\,f\,(:\,x\,y) &\to\ :(f\,x)\,(\mathsf{map}\,f\,y) \\ \mathsf{add}\,(\mathsf{s}\,x)\,y &\to \mathsf{s}\,(\mathsf{add}\,x\,y) \end{aligned}$$

Definition (η-saturation)

$\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R} \cup \{l \circ x \to r \circ x \mid l \to r \in \mathcal{R}_\eta, aa(l) > 0\}$

Example

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = \mathsf{aa}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathsf{aa}(\mathsf{add}) = \mathsf{aa}(\mathsf{map}) = \mathsf{aa}(:) = 2$, $\mathsf{aa}(0) = \mathsf{aa}(\mathsf{nil}) = 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{id}\, x &\to x \\ \mathsf{add}\, 0 &\to \mathsf{id} \\ \mathsf{add}\,(\mathsf{s}\, x)\, y &\to \mathsf{s}\,(\mathsf{add}\, x\, y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{map}\, f\,(:\, x\, y) &\to\, :(f\, x)\,(\mathsf{map}\, f\, y) \end{aligned}$$

Definition (η-saturation)

$\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R} \cup \{l \circ x \to r \circ x \mid l \to r \in \mathcal{R}_\eta, aa(l) > 0\}$

Example

$\mathsf{aa}(\mathsf{id}) = \mathsf{aa}(\mathsf{s}) = 1,\ \mathsf{aa}(\mathsf{add}) = \mathsf{aa}(\mathsf{map}) = \mathsf{aa}(:) = 2,\ \mathsf{aa}(\mathsf{0}) = \mathsf{aa}(\mathsf{nil}) = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}\,x &\to x \\
\mathsf{add}\,\mathsf{0} &\to \mathsf{id} \\
\mathsf{add}\,(\mathsf{s}\,x)\,y &\to \mathsf{s}\,(\mathsf{add}\,x\,y) \\
\mathsf{add}\,\mathsf{0}\,x &\to \mathsf{id}\,x
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathsf{map}\,f\,\mathsf{nil} &\to \mathsf{nil} \\
\mathsf{map}\,f\,(:\,x\,y) &\to\ :(f\,x)\,(\mathsf{map}\,f\,y)
\end{aligned}
$$

Definition

$\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_\eta){\downarrow_{\mathcal{U}}} \cup \mathcal{U}$

Definition

$\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_\eta){\downarrow_\mathcal{U}} \cup \mathcal{U}$

Theorem (Hirokawa et al. 2008)

$\mathcal{R}$ terminating if and only if $\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ terminating

Definition

$\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_\eta)\downarrow_\mathcal{U} \cup \mathcal{U}$

Theorem (Hirokawa et al. 2008)

$\mathcal{R}$ terminating if and only if $\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ terminating

Example ($\mathcal{R}$)

$$\mathsf{id}\ x \to x$$

$$\mathsf{add}\ \mathsf{0} \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{add}\ (\mathsf{s}\ x)\ y \to \mathsf{s}\ (\mathsf{add}\ x\ y)$$

$$\mathsf{map}\ f\ \mathsf{nil} \to \mathsf{nil} \qquad \mathsf{map}\ f\ (:\ x\ y) \to\ :\ (f\ x)\ (\mathsf{map}\ f\ y)$$

Definition

$\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_\eta)\!\downarrow_{\mathcal{U}} \cup\, \mathcal{U}$

Theorem (Hirokawa et al. 2008)

$\mathcal{R}$ terminating if and only if $\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ terminating

Example ($\mathcal{R}_\eta$)

$$\mathsf{id}\, x \to x$$

$$\mathsf{add}\, \mathsf{0} \to \mathsf{id} \qquad \mathsf{add}\, (\mathsf{s}\, x)\, y \to \mathsf{s}\, (\mathsf{add}\, x\, y)$$

$$\mathsf{map}\, f\, \mathsf{nil} \to \mathsf{nil} \qquad \mathsf{map}\, f\, (:\, x\, y) \to\, :\, (f\, x)\, (\mathsf{map}\, f\, y)$$

$$\mathsf{add}\, \mathsf{0}\, x \to \mathsf{id}\, x$$

Definition

$\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_\eta){\downarrow_\mathcal{U}} \cup \mathcal{U}$

Theorem (Hirokawa et al. 2008)

$\mathcal{R}$ terminating if and only if $\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ terminating

Example ($\mathcal{R}_\eta{\downarrow_\mathcal{U}}$)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}_1(x) &\to x \\
\mathsf{add}_1(\mathsf{0}) &\to \mathsf{id} & \mathsf{add}_2(\mathsf{s}_1(x), y) &\to \mathsf{s}_1(\mathsf{add}_2(x, y)) \\
\mathsf{map}_2(f, \mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} & \mathsf{map}_2(f, :_2(x, y)) &\to :_2(f \circ x, \mathsf{map}_2(f, y)) \\
\mathsf{add}_2(\mathsf{0}, x) &\to \mathsf{id}_1(x)
\end{aligned}
$$

Definition

$\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R}) = (\mathcal{R}_\eta){\downarrow_{\mathcal{U}}} \cup \mathcal{U}$

Theorem (Hirokawa et al. 2008)

$\mathcal{R}$ terminating if and only if $\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ terminating

Example ($\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}_1(x) &\to x \\
\mathsf{add}_1(0) &\to \mathsf{id} & \mathsf{add}_2(\mathsf{s}_1(x), y) &\to \mathsf{s}_1(\mathsf{add}_2(x, y)) \\
\mathsf{map}_2(f, \mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} & \mathsf{map}_2(f, :_2(x, y)) &\to :_2(f \circ x, \mathsf{map}_2(f, y)) \\
\mathsf{add}_2(0, x) &\to \mathsf{id}_1(x) \\
\mathsf{id} \circ x &\to \mathsf{id}_1(x) & \mathsf{s} \circ x &\to \mathsf{s}_1(x) \\
\mathsf{add} \circ x &\to \mathsf{add}_1(x) & \mathsf{add}_1(x) \circ y &\to \mathsf{add}_2(x, y) \\
\mathsf{map} \circ x &\to \mathsf{map}_1(x) & \mathsf{map}_1(x) \circ y &\to \mathsf{map}_2(x, y) \\
: \circ x &\to :_1(x) & :_1(x) \circ y &\to :_2(x, y)
\end{aligned}
$$

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad\qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad\qquad \mathcal{R}$$

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\, x \to \mathsf{f}\, x \qquad \mathcal{R}$$

innermost terminating

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad \mathcal{R}$$

innermost terminating

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad \mathcal{R}$$

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad \mathcal{R}$$

innermost terminating

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad \mathcal{R}_\eta$$

$$\mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x$$

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad \mathcal{R}$$

innermost terminating

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{f}_1(x) \qquad \mathcal{R}_\eta{\downarrow_\mathcal{U}}$$

$$\mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{g} \circ x$$

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\ x \to \mathsf{f}\ x \qquad \mathcal{R}$$

innermost terminating

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{f}_1(x) \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{g} \circ x$$

$$\mathsf{f} \circ x \to \mathsf{f}_1(x)$$

Innermost Termination

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{f}\,x \qquad \mathcal{R}$$

innermost terminating

$$\begin{aligned} \mathsf{f} &\to \mathsf{g} & \mathsf{f}_1(x) &\to \mathsf{f}_1(x) & \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R}) \\ \mathsf{f}_1(x) &\to \mathsf{g} \circ x \\ \mathsf{f} \circ x &\to \mathsf{f}_1(x) \end{aligned}$$

not innermost terminating

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}\, x \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{R}$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$

Example (Counterexample)

$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}\,x \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{R}$

$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}\,x \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{R}$$

$$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}_1(x) \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$$s \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}\, x \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{R}$$

$$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}_1(x) \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

$$s{\downarrow_{\mathcal{U}}} = \mathsf{f} \circ \mathsf{a} \qquad \mathsf{g}_1(\mathsf{a}) = t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}\, x \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{R}$$

$$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}_1(x) \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

$$s{\downarrow_{\mathcal{U}}} = \mathsf{f} \circ \mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \mathsf{g} \circ \mathsf{a} \not\xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \mathsf{g}_1(\mathsf{a}) = t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 1

$$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}\, x \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{R}$$

$$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{g}_1(x) \to \mathsf{h} \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

$$s{\downarrow_{\mathcal{U}}} = \mathsf{f} \circ \mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \mathsf{f} \circ \mathsf{b} \not\xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \mathsf{g}_1(\mathsf{a}) = t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow$ $\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})$ innermost terminating

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & \\ \cdot & & \end{array}$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$
\begin{array}{ccc}
s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\
{}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} \\
\cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot
\end{array}
$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^+_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Example (Counterexample)

$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{R}$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Example (Counterexample)

$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{R}$

$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{R}$$

$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{f} \to \mathsf{g} & \mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{g}_1(x) & \mathsf{a} \to \mathsf{b} & \mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R}) \\ & \mathsf{f} \circ x \to \mathsf{f}_1(x) & \mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x) & \end{array}$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{R}$$

$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{g}_1(x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{f} \circ x \to \mathsf{f}_1(x) \qquad \mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

$s \to_{\mathcal{U}}^* \mathsf{f}_1(\mathsf{a}) \not\xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \cdot \; {}_{\mathcal{U}}^{*}\!\leftarrow t$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{R}$$

$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{g}_1(x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{f} \circ x \to \mathsf{f}_1(x) \qquad \mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

$s \to_{\mathcal{U}}^* \mathsf{f}_1(\mathsf{a}) \not\xrightarrow{\mathsf{i}}{}^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \mathsf{g} \circ \mathsf{a} \;{}_{\mathcal{U}}^*\!\!\leftarrow t$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 2

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Example (Counterexample)

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}\,x \to \mathsf{g}\,x \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{R}$$

$s = \mathsf{f}\,\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}\,\mathsf{a} = t$

$$\mathsf{f} \to \mathsf{g} \qquad \mathsf{f}_1(x) \to \mathsf{g}_1(x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b} \qquad \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

$$\mathsf{f} \circ x \to \mathsf{f}_1(x) \qquad \mathsf{g} \circ x \to \mathsf{g}_1(x)$$

$s \to_{\mathcal{U}}^* \mathsf{f}_1(\mathsf{a}) \not\xrightarrow{\mathsf{i}}{}^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \mathsf{g}_1(\mathsf{a}) \;{}_{\mathcal{U}}^*\!\!\leftarrow t$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_{\eta}^{+}(\mathcal{R})$ innermost terminating

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 3

$$
\begin{array}{ccc}
s & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & t \\
{}_{*}\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_{*}\downarrow_{\mathcal{U}} \\
\cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot
\end{array}
$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 3

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\text{ri}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\!\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\text{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Key Lemma

$${}_{\mathcal{U}}^{*}\!\!\leftarrow s \xrightarrow{\text{i}}{}^{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \xrightarrow{\text{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} \cdot {}_{\mathcal{U}}^{*}\!\!\leftarrow$$

Question

$\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})$ innermost terminating

Proof Idea 3

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & t \\ {}_*\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_*\downarrow_{\mathcal{U}} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} & \cdot \end{array}$$

Key Lemma

$${}_{\mathcal{U}}^{*}\!\!\leftarrow s \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} \cdot {}_{\mathcal{U}}^{*}\!\!\leftarrow$$

Lemma (Rao 2000)

$\mathcal{R}$ innermost terminating if and only if $\mathcal{R}$ rightmost innermost terminating

Results

Results for Innermost Termination

- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\not\Rightarrow$ $\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})$ innermost terminating
- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow$ $\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})$ innermost terminating

Results

Results for Innermost Termination

- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\not\Rightarrow$ $\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating
- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow$ $\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Results

Results for Innermost Termination

- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\not\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating
- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Uncurrying is ...

- (not) sound for proving (innermost) nontermination
- sound for proving (innermost) termination

Results

Results for Innermost Termination

- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\not\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating
- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Uncurrying is . . .

- (not) sound for proving (innermost) nontermination
- sound for proving (innermost) termination

Results

Results for Innermost Termination

- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\not\Rightarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating
- $\mathcal{R}$ innermost terminating $\Leftarrow \mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$ innermost terminating

Uncurrying is ...

- (not) sound for proving (innermost) nontermination
- sound for proving (innermost) termination

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \rightarrow) = \max\{m \mid t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_m\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(n, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Example

$$\mathsf{a}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{a}(x))$$

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^2)$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(n, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Example

$$\mathsf{a}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{a}(x))$$

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^2)$ since $\mathsf{a}^{\frac{n}{2}}(\mathsf{b}^{\frac{n}{2}}(x)) \to^{\leqslant n^2} \mathsf{b}^{\frac{n}{2}}(\mathsf{a}^{\frac{n}{2}}(x))$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Example

$$\mathsf{a}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{a}(x))$$

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^2)$ since $\mathsf{a}^{\frac{n}{2}}(\mathsf{b}^{\frac{n}{2}}(x)) \to^{\leqslant n^2} \mathsf{b}^{\frac{n}{2}}(\mathsf{a}^{\frac{n}{2}}(x))$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$? $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Question

$\mathsf{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}))$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})})$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

$$t_0 \quad \to_{\mathcal{R}} \quad t_1 \quad \to_{\mathcal{R}} \quad t_2 \quad \to_{\mathcal{R}} \quad \cdots$$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$

$s \to_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \to^+_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$t_0 \quad \to_{\mathcal{R}} \quad t_1 \quad \to_{\mathcal{R}} \quad t_2 \quad \to_{\mathcal{R}} \quad \cdots$$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$

$s \to_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \to^+_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{cccccccc} t_0 & \to_{\mathcal{R}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \\ t_0{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} & t_1{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} & t_2{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})} & \cdots \end{array}$$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

$s \to_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{lccccccc} & t_0 & \to_{\mathcal{R}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \\ {\color{red}t_0 \to^*_{\mathcal{U}}} & t_0{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_1{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_2{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdots \end{array}$$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

$s \to_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{lllllll} & t_0 & \to_{\mathcal{R}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \\ t_0 \to^*_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_0{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_1{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_2{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdots \end{array}$$

Question

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}))$

Proof Sketch

We show $\mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dh}(t_0, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

$s \to_{\mathcal{R}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{U}}} \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} t{\downarrow_{\mathcal{U}}}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{lllllll} & t_0 & \to_{\mathcal{R}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \\ t_0 \to^*_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_0{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_1{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & t_2{\downarrow_{\mathcal{U}}} & \to^+_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})} & \cdots \end{array}$$

Remark

This is the important direction!

Question

$\mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Question

$$\mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) \Rightarrow \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k)$$

Question

$$\mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) \Rightarrow \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k)$$

$$t_0 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} \quad t_1 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} \quad t_2 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} \quad \cdots$$

Question

$\mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) \Rightarrow \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k)$$

$s \to_{\mathcal{R}\downarrow_{\mathcal{U}}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \to_{\mathcal{R}} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$t_0 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} \quad t_1 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} \quad t_2 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} \quad \cdots$$

Question

$\mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$:_2(f \circ x, \mathsf{map}_2(f, y))\downarrow_{\mathcal{C}'}$

$s \to_{\mathcal{R}\downarrow_\mathcal{U}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \to_{\mathcal{R}} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$t_0 \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} t_1 \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} t_2 \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} \cdots$

Question

$\mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$:_2(f \circ x, \mathsf{map}_2(f, y))\downarrow_{\mathcal{C}'} = \, : \circ (f \circ x) \circ (\mathsf{map} \circ f \circ y)$

$s \to_{\mathcal{R}\downarrow_\mathcal{U}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \to_\mathcal{R} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$t_0 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} \quad t_1 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} \quad t_2 \quad \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} \quad \cdots$

Question

$\mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) \Rightarrow \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k)$$

$s \to_{\mathcal{R}\downarrow_{\mathcal{U}}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \to_{\mathcal{R}} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{llllllll} t_0 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & \cdots \\ t_0\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & t_1\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & t_2\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \end{array}$$

Question

$\mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R}})) = \mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$:_2(f \circ x, \mathsf{map}_2(f, y))\downarrow_{\mathcal{C}'} = : \circ (f \circ x) \circ (\mathsf{map} \circ f \circ y)$

$s \rightarrow_{\mathcal{R}\downarrow_{\mathcal{U}}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \rightarrow_{\mathcal{R}} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{cccccccc} t_0 & \rightarrow_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & t_1 & \rightarrow_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & t_2 & \rightarrow_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & \cdots \\ t_0\downarrow_{\mathcal{C}'} & \rightarrow_{\mathcal{R}} & t_1\downarrow_{\mathcal{C}'} & \rightarrow_{\mathcal{R}} & t_2\downarrow_{\mathcal{C}'} & \rightarrow_{\mathcal{R}} & \cdots \end{array}$$

$|t_0\downarrow_{\mathcal{C}'}| \leqslant 2|t_0|$

Question

$\mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) \Rightarrow \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta{\downarrow_{\mathcal{U}}}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k)$$

$s \to_{\mathcal{R}{\downarrow_{\mathcal{U}}}} t \Rightarrow s{\downarrow_{\mathcal{C}'}} \to_{\mathcal{R}} t{\downarrow_{\mathcal{C}'}}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{llllllll} t_0 & \to_{\mathcal{R}_\eta{\downarrow_{\mathcal{U}}}/\mathcal{U}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}_\eta{\downarrow_{\mathcal{U}}}/\mathcal{U}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}_\eta{\downarrow_{\mathcal{U}}}/\mathcal{U}} & \cdots \\ t_0{\downarrow_{\mathcal{C}'}} & \to_{\mathcal{R}} & t_1{\downarrow_{\mathcal{C}'}} & \to_{\mathcal{R}} & t_2{\downarrow_{\mathcal{C}'}} & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \end{array}$$

$|t_0{\downarrow_{\mathcal{C}'}}| \leqslant 2|t_0| \Rightarrow \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta{\downarrow_{\mathcal{U}}}/\mathcal{U}}) \leqslant \mathrm{dc}(2n, \to_{\mathcal{R}})$

Question

$\mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) \Rightarrow \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k)$$

[*Hirokawa & Moser* 2008] $\Rightarrow \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$

$s \to_{\mathcal{R}\downarrow_{\mathcal{U}}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \to_{\mathcal{R}} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{llllllc} t_0 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}} & \cdots \\ t_0\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & t_1\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & t_2\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \end{array}$$

$|t_0\downarrow_{\mathcal{C}'}| \leqslant 2|t_0| \Rightarrow \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}) \leqslant \mathrm{dc}(2n, \to_{\mathcal{R}})$

Question

$\mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})})$

Proof Sketch (slightly weaker result)

We show

$$\begin{aligned} \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k) &\Rightarrow \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}}) = \mathcal{O}(n^k) \\ \text{[\textit{Hirokawa \& Moser} 2008]} &\Rightarrow \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k) \end{aligned}$$

$s \to_{\mathcal{R}\downarrow_\mathcal{U}} t \Rightarrow s\downarrow_{\mathcal{C}'} \to_{\mathcal{R}} t\downarrow_{\mathcal{C}'}$ [Hirokawa et al. 2008]

$$\begin{array}{llllllll} t_0 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} & t_1 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} & t_2 & \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}} & \cdots \\ t_0\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & t_1\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & t_2\downarrow_{\mathcal{C}'} & \to_{\mathcal{R}} & \cdots \end{array}$$

$|t_0\downarrow_{\mathcal{C}'}| \leqslant 2|t_0| \Rightarrow \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_\eta\downarrow_\mathcal{U}/\mathcal{U}}) \leqslant \mathsf{dc}(2n, \to_{\mathcal{R}})$

Remark

This is the interesting direction!

Innermost Derivational Complexity

Lemma

$$\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})})$$

Innermost Derivational Complexity

Lemma

$$\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})})$$

Proof Sketch

$\mathsf{dh}(t, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dh}(t, \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}})$ [Rao 2000]

$$\begin{array}{ccccccc}
t_0 & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & t_1 & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & t_2 & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & \cdots \\
{}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & \vdots \\
t_0 & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdots
\end{array}$$

Innermost Derivational Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) \leqslant \mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})})$

Proof Sketch

$\mathsf{dh}(t, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dh}(t, \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}})$ [Rao 2000]

$$\begin{array}{ccccccc}
t_0 & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & t_1 & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & t_2 & \xrightarrow{\mathsf{ri}}_{\mathcal{R}} & \cdots \\
{}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & {}_{*}\!\downarrow_{\mathcal{U}} & & \vdots \\
t_0 & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdot & \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{+}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})} & \cdots
\end{array}$$

Remark

$\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) \not\geqslant \mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}^{+}_{\eta}(\mathcal{R})})$

Results (2)

Results for Derivational Complexity

- $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if and only if $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$
- $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$

Results (2)

Results for Derivational Complexity

- $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if and only if $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$
- $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$

Results (2)

Results for Derivational Complexity

- $\mathsf{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if and only if $\mathsf{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$
- $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}^+_\eta(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$

Uncurrying ...

- (not) reflects polynomial (innermost) derivational complexity
- is sound for proving (innermost) derivational complexity

Results (2)

Results for Derivational Complexity

- $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if and only if $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$
- $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$

Uncurrying ...

- (not) reflects polynomial (innermost) derivational complexity
- is sound for proving (innermost) derivational complexity

Results (2)

Results for Derivational Complexity

- $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if and only if $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$
- $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^k)$ if $\mathsf{dc}(n, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})}) = \mathcal{O}(n^k)$

Uncurrying . . .

- (not) reflects polynomial (innermost) derivational complexity
- is sound for proving (innermost) derivational complexity

Conclusion

Question

What do spaghetti carbonara and uncurrying proofs have in common?

$$\mathcal{U}_{\eta}^{+}(\mathcal{R})$$

Conclusion

Question

What do spaghetti carbonara and uncurrying proofs have in common?

$$\mathcal{U}_{\eta}^{+}(\mathcal{R})$$

Answer

Both look very complicated and one can never be sure if there are no bugs in it.

Conclusion

Question

What do spaghetti carbonara and uncurrying proofs have in common?

$$\mathcal{U}_\eta^+(\mathcal{R})$$

Answer

Both look very complicated and one can never be sure if there are no bugs in it.

Future Work

Certification with theorem prover