On Implementing Modular Complexity Analysis

Harald Zankl Martin Korp

Institute of Computer Science
University of Innsbruck
Austria

IWIL 2010 (Yogya) 10 October 2010

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))))$$

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0))))$$

Example (Term Rewrite System)

$$\mathsf{half}(0) \rightarrow 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \rightarrow 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \rightarrow 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \rightarrow_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \rightarrow_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \rightarrow_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)))$

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}}$
$\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)))))$

Example (Term Rewrite System)

$$\mathsf{half}(\mathsf{0}) \to \mathsf{0} \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{0}) \to \mathsf{0}$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) \to \mathsf{0} \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(\mathsf{0})))) \to_{\mathcal{R}}$
$\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{0})))$

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}}$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Example (Term Rewrite System)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}}$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Definition (Termination)

TRS $\mathcal{R}$ terminating iff no reduction $t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}}$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Definition (Termination)

TRS $\mathcal{R}$ terminating iff no reduction $t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

Theorem

$\exists$ *reduction order* $>$ *s.t.* $\mathcal{R} \subseteq >$ *then* $\mathcal{R}$ *terminating*

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &> 0 & \mathsf{bits}(0) &> 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &> 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &> \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &> \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}}$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0))))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Definition (Termination)

TRS $\mathcal{R}$ terminating iff no reduction $t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

Theorem

$\exists$ *reduction order* $>$ *s.t.* $\mathcal{R} \subseteq >$ *then* $\mathcal{R}$ *terminating*

Example (Term Rewrite System)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) > \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) > \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0))))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{bits}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Definition (Termination)

TRS $\mathcal{R}$ terminating iff no reduction $t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

Theorem

$\exists$ *reduction order* $>$ *s.t.* $\mathcal{R} \subseteq >$ *then* $\mathcal{R}$ *terminating*

Overview

- Derivational Complexity
- Relative Rewriting
- Modular Complexity
- Experiments
- Conclusion

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation*

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \rightarrow) = \max\{m \mid t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \rightarrow) = \max\{\mathsf{dh}(t, \rightarrow) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ rewrite relation and $\mathcal{R} \subseteq >$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(n, >) \geqslant \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(n, >) \geqslant \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Current approaches

TMIs

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(n, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(n, >) \geqslant \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Current approaches

TMIs, AMIs

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(n, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(n, >) \geqslant \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Current approaches

TMIs, AMIs, matchbounds

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(n, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(n, >) \geqslant \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(n, >) \geqslant \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$\mathsf{a}(x) > \mathsf{b}(x)$ $\mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2$ $\mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(n, >) \geqslant \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant 2 \cdot |t|$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{m \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(n, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(n, >) \geqslant \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant 2 \cdot |t| \longrightarrow \mathsf{dc}(n, >_{\mathbb{N}}) = \mathcal{O}(n)$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \rightarrow) = \max\{m \mid t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_m\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(n, \rightarrow) = \max\{\mathrm{dh}(t, \rightarrow) \mid |t| \leqslant n\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(n, >) \geqslant \mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant 2 \cdot |t| \longrightarrow \mathrm{dc}(n, >_{\mathbb{N}}) = \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n)$$

Example ($\mathcal{R}$ = AG01/#3.7)

$$\mathsf{half}(\mathsf{0}) \to \mathsf{0} \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) \to \mathsf{0}$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

Example ($\mathcal{R}$ = AG01/#3.7)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &> 0 & \mathsf{log}(\mathsf{s}(0)) &> 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &> \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &> \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

TMI

$$\mathsf{log}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \qquad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example ($\mathcal{R}$ = AG01/#3.7)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

TMI (0.7 sec)

$$\mathsf{log}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \qquad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^2)$

Example ($\mathcal{R}$ = AG01/#3.7)

$$\mathsf{half}(0) > 0 \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(0)) > 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) > \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) > \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

AMI

$$\mathsf{log}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 2 & -\infty \\ 0 & -\infty \end{pmatrix} x \qquad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^2)$

Example ($\mathcal{R}$ = AG01/#3.7)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{log}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

AMI (5.1 sec)

$$\mathsf{log}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x$$
$$\mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 2 & -\infty \\ 0 & -\infty \end{pmatrix} x \qquad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n)$

Implementation

Strategy

```
LINEAR    = (arctic -dim 1 -ib 4 -ob 5 -direct ||
             arctic -dim 2 -ib 3 -ob 4 -direct ||
             arctic -dim 3 -ib 2 -ob 3 -direct ||
             bounds ||
             matrix -triangle -dim 1 -ib 5 -ob 6 -direct ||
             ...)

QUADRATIC = (matrix -triangle -dim 2 -ib 4 -ob 5 -direct || ...)

CUBIC     = (matrix -triangle -dim 3 -ib 3 -ob 4 -direct || ...)

QUARTIC   = (matrix -triangle -dim 4 -ib 2 -ob 3 -direct || ...)
```

Implementation

Strategy

```
LINEAR    = (arctic -dim 1 -ib 4 -ob 5 -direct ||
             arctic -dim 2 -ib 3 -ob 4 -direct ||
             arctic -dim 3 -ib 2 -ob 3 -direct ||
             bounds ||
             matrix -triangle -dim 1 -ib 5 -ob 6 -direct ||
             ...)

QUADRATIC = (matrix -triangle -dim 2 -ib 4 -ob 5 -direct || ...)

CUBIC     = (matrix -triangle -dim 3 -ib 3 -ob 4 -direct || ...)

QUARTIC   = (matrix -triangle -dim 4 -ib 2 -ob 3 -direct || ...)
```

Execution

```
run LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC
```

Implementation

Strategy

```
LINEAR    = (arctic -dim 1 -ib 4 -ob 5 -direct ||
             arctic -dim 2 -ib 3 -ob 4 -direct ||
             arctic -dim 3 -ib 2 -ob 3 -direct ||
             bounds ||
             matrix -triangle -dim 1 -ib 5 -ob 6 -direct ||
             ...)

QUADRATIC = (matrix -triangle -dim 2 -ib 4 -ob 5 -direct || ...)

CUBIC     = (matrix -triangle -dim 3 -ib 3 -ob 4 -direct || ...)

QUARTIC   = (matrix -triangle -dim 4 -ib 2 -ob 3 -direct || ...)
```

Execution

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and take tightest bound

Relative Termination

Definition

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{S}}^{*}$

Relative Termination

Definition

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow^*_{\mathcal{S}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Relative Termination

Definition

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow^*_{\mathcal{S}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_3 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_4 \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdots$

Relative Termination

Definition

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{S}}^{*}$

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_3 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_4 \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdots$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \cdots$$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\binom{t_1}{t_1} \begin{smallmatrix} > \\ ? \end{smallmatrix} \binom{t_2}{t_2} \begin{smallmatrix} \geqslant \\ > \end{smallmatrix} \binom{t_3}{t_3} \begin{smallmatrix} \geqslant \\ > \end{smallmatrix} \binom{t_4}{t_4} \begin{smallmatrix} > \\ ? \end{smallmatrix} \quad \cdots$$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$

$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = ?$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$

$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$ $\qquad$ $\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}) = ?$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$ $\qquad$ $\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$

$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$ $\quad$ $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$ $\quad$ $\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = ?$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}))$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{c}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{R}(x)\}$$

$$\mathcal{S} = \{\mathsf{R}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{b}(\mathsf{b}(\mathsf{R}(x))), \mathsf{R}(x) \to \mathsf{L}(x), \mathsf{b}(\mathsf{L}(x)) \to \mathsf{L}(\mathsf{a}(x))\}$$

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$ $\quad$ $\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(n)$ $\quad$ $\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Omega(2^n)$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \ = \ \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \;\to_{\mathcal{R}}\; t_2 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_3 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_4 \;\to_{\mathcal{R}}\; \cdots$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \; \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \; \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \;\to_{\mathcal{R}}\; t_2 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_3 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_4 \;\to_{\mathcal{R}}\; \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \ \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \ \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \ \to_{\mathcal{R}} \ t_2 \ \to_{\mathcal{S}} \ t_3 \ \to_{\mathcal{S}} \ t_4 \ \to_{\mathcal{R}} \ \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \; \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \; \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \;\to_{\mathcal{R}}\; t_2 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_3 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_4 \;\to_{\mathcal{R}}\; \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \mathcal{O}(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \; \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \; \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \;\to_{\mathcal{R}}\; t_2 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_3 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_4 \;\to_{\mathcal{R}}\; \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \cdots$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;=\; \Theta(\mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(n, \rightarrow_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \; \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \; \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \;\rightarrow_{\mathcal{R}}\; t_2 \;\rightarrow_{\mathcal{S}}\; t_3 \;\rightarrow_{\mathcal{S}}\; t_4 \;\rightarrow_{\mathcal{R}}\; \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \;\cdots$$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$ $\qquad$ $\mathsf{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Modular Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing}) \qquad \mathrm{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Theorem

$\mathrm{dc}(n, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing}) \qquad \mathsf{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Theorem

$\mathsf{dc}(n, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$

Modular Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing}) \qquad \mathrm{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Theorem

$\mathrm{dc}(n, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Modular Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing}) \qquad \mathrm{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Theorem

$\mathrm{dc}(n, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair*

Modular Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$ $\qquad$ $\mathrm{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Theorem

$\mathrm{dc}(n, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathrm{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair,* $\mathcal{R} \subseteq >$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\varnothing}) \qquad \mathsf{dc}(n, \to_{\varnothing/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(1)$

Theorem

$\mathsf{dc}(n, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair*, $\mathcal{R} \subseteq >$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant \quad \longrightarrow \mathsf{dc}(n, >) \geqslant \mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}})$

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Example

$$\mathsf{f}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{g}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) > \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) > \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \geqslant \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \geqslant \mathsf{g}(x)$$

Example

$$\mathsf{f}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{g}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \geqslant \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \geqslant \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) > \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) > \mathsf{g}(x)$$

Example

$$\mathsf{f}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{g}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathsf{g}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{f}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad 1_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Example

$$\mathsf{f}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{g}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathsf{g}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{f}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad 1_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(n, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(n^2)$

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and take tightest bound

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \qquad \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Root-Labeling and TMI

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\geqslant 0 & \mathsf{bits}(0) &\geqslant 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\geqslant 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\geqslant \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &> \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Root-Labeling and TMI (0.5 sec)

$\mathcal{O}(n^2)$ (too large for display)

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

AMI

$$\mathsf{bits}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -\infty & 1 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\geqslant 0 & \qquad \mathsf{bits}(0) &\geqslant 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\geqslant 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\geqslant \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &> \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

AMI (2.8 sec)

$$\mathsf{bits}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -\infty & 1 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

AMI (2.8 sec)

$$\mathsf{bits}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -\infty & 1 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Problems

partial proofs

Implementation

Approach

run `LINEAR || QUADRATIC || CUBIC || QUARTIC` and ~~take tightest bound~~

Example ($\mathcal{R}$ = Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

AMI (2.8 sec)

$$\mathsf{bits}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{s}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -\infty & 1 \end{pmatrix} x \quad \mathsf{half}_{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x \quad 0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Problems

partial proofs, incomparable proofs

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof

Example

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof

Example

$$\{1,2,3,4,5\} \downarrow \mathcal{O}(1) \{1,2,3,4,5\}/\varnothing$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\downarrow \mathcal{O}(1)$$
$$\{1, 2, 3, 4, 5\}/\varnothing$$
$$\downarrow \mathcal{O}(n^5)$$
$$\{2, 4\}/\{1, 3, 5\}$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{1, 2, 3, 4, 5\}/\varnothing \xrightarrow{\mathcal{O}(n^5)} \{2, 4\}/\{1, 3, 5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(n^2)} \varnothing/\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$)

Example

$$\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \boxed{\{1,2,3,4,5\}/\varnothing \xrightarrow{\mathcal{O}(n^5)} \{2,4\}/\{1,3,5\}} \xrightarrow{\mathcal{O}(n^2)} \varnothing/\{1,2,3,4,5\}$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1,2,3,4,5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$)   (2) tighten bound

Example

$$\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{1,2,3,4,5\}/\varnothing \xrightarrow{\mathcal{O}(n^5)} \{2,4\}/\{1,3,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(n^2)} \varnothing/\{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{1,2,3,4,5\}/\varnothing$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$) (2) tighten bound

Example

$$\{1,2,3,4,5\}$$
$$\downarrow \mathcal{O}(1)$$
$$\{1,2,3,4,5\}/\varnothing$$
$$\downarrow \mathcal{O}(n^5)$$
$$\{2,4\}/\{1,3,5\}$$
$$\downarrow \mathcal{O}(n^2)$$
$$\varnothing/\{1,2,3,4,5\}$$

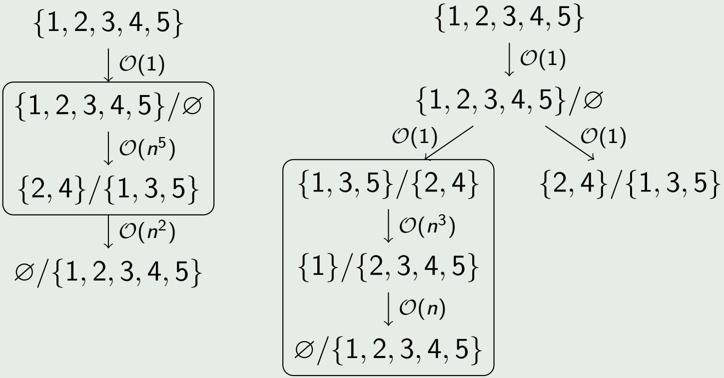
$$\{1,2,3,4,5\}$$
$$\downarrow \mathcal{O}(1)$$
$$\{1,2,3,4,5\}/\varnothing$$
$$\swarrow \mathcal{O}(1) \qquad \searrow \mathcal{O}(1)$$
$$\{1,3,5\}/\{2,4\} \qquad \{2,4\}/\{1,3,5\}$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$) (2) tighten bound

Example



Main idea ($\mathcal{R} = \{1,2,3,4,5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$) (2) tighten bound

Example

$$\begin{array}{c}
\{1,2,3,4,5\} \\
\downarrow \mathcal{O}(1) \\
\{1,2,3,4,5\}/\varnothing \\
\downarrow \mathcal{O}(n^5) \\
\{2,4\}/\{1,3,5\} \\
\downarrow \mathcal{O}(n^2) \\
\varnothing/\{1,2,3,4,5\}
\end{array}$$

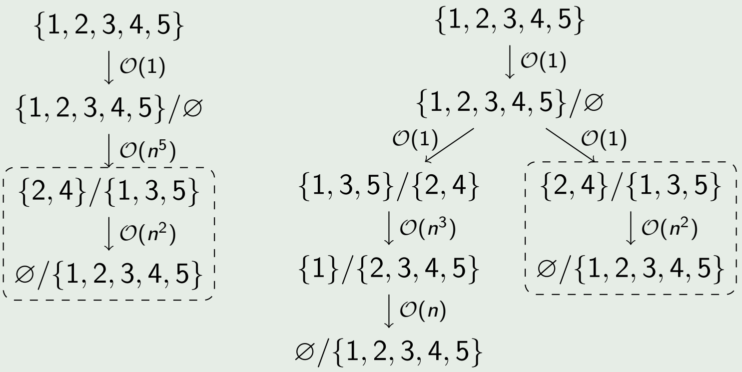
$$\begin{array}{ccc}
 & \{1,2,3,4,5\} & \\
 & \downarrow \mathcal{O}(1) & \\
 & \{1,2,3,4,5\}/\varnothing & \\
\mathcal{O}(1) \swarrow & & \searrow \mathcal{O}(1) \\
\{1,3,5\}/\{2,4\} & & \{2,4\}/\{1,3,5\} \\
\downarrow \mathcal{O}(n^3) & & \\
\{1\}/\{2,3,4,5\} & & \\
\downarrow \mathcal{O}(n) & & \\
\varnothing/\{1,2,3,4,5\} & &
\end{array}$$

Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$)   (2) tighten bound

Example



Main idea ($\mathcal{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Approach

(1) find proof ($\mathcal{O}(n^5)$) (2) tighten bound ($\mathcal{O}(n^3)$)

Example

$$\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{1,2,3,4,5\}/\varnothing \xrightarrow{\mathcal{O}(n^5)} \{2,4\}/\{1,3,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(n^2)} \varnothing/\{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{1,2,3,4,5\}/\varnothing$$

$$\{1,2,3,4,5\}/\varnothing \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{1,3,5\}/\{2,4\} \xrightarrow{\mathcal{O}(n^3)} \{1\}/\{2,3,4,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(n)} \varnothing/\{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2,3,4,5\}/\varnothing \xrightarrow{\mathcal{O}(1)} \{2,4\}/\{1,3,5\} \xrightarrow{\mathcal{O}(n^2)} \varnothing/\{1,2,3,4,5\}$$

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315				
direct$\star$	315				

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315	202	234	259	1.7
direct$\star$	315	215	303	312	7.9

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315	202	234	259	1.7
direct⋆	315	215	303	312	7.9
modular	334				
modular⋆	334				

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315	202	234	259	1.7
direct$\star$	315	215	303	312	7.9
modular	334	208	228	261	2.6
modular$\star$	334	221	321	329	10.6

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315	202	234	259	1.7
direct$\star$	315	215	303	312	7.9
modular	334	208	228	261	2.6
modular$\star$	334	221	321	329	10.6
CaT(2010)	328				

Remark

CaT winner 2008–2010 (derivational complexity, termination competition)

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315	202	234	259	1.7
direct$\star$	315	215	303	312	7.9
modular	334	208	228	261	2.6
modular$\star$	334	221	321	329	10.6
CaT(2010)	328	216	310	319	4.2

Remark

CaT winner 2008–2010 (derivational complexity, termination competition)

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time (sec)
direct	315	202	234	259	1.7
direct⋆	315	215	303	312	7.9
modular	334	208	228	261	2.6
modular⋆	334	221	321	329	10.6
CaT(2010)	328	216	310	319	4.2
CaT(2010)⋆	328	219	317	324	11.5

Remark

CaT winner 2008–2010 (derivational complexity, termination competition)

Conclusion

Idea

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem
- (1) find upper bound (2) tighten bound

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem
- (1) find upper bound (2) tighten bound

Benefit

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem
- (1) find upper bound (2) tighten bound

Benefit

- maximize number of total bounds

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem
- (1) find upper bound   (2) tighten bound

Benefit

- maximize number of total bounds
- tight bounds

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem
- (1) find upper bound (2) tighten bound

Benefit

- maximize number of total bounds
- tight bounds

Future Work

Conclusion

Idea

- derivational complexity is not a yes/no problem
- (1) find upper bound (2) tighten bound

Benefit

- maximize number of total bounds
- tight bounds

Future Work

- exploit existing proof step