Modular Complexity Analysis

Harald Zankl Martin Korp

Institute of Computer Science
University of Innsbruck
Austria

2nd Workshop on
Proof Theory and Rewriting
Obergurgl, 31 March 2010

Overview

- Derivational Complexity
- Relative Rewriting
- Modular Complexity
- Assessment
- Experiments
- Conclusion

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$$\mathsf{dh}(t, \rightarrow) = \max\{n \mid t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_n\}$$

Definition (Derivational Complexity)

$$\mathsf{dc}(m, \rightarrow) = \max\{\mathsf{dh}(t, \rightarrow) \mid |t| \leqslant m\}$$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\quad\longrightarrow\quad$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Current approaches

TMIs, AMIs, matchbounds

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\qquad$ $\mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant C \cdot |t|$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathrm{a}(x) \to \mathrm{b}(x) \qquad \mathrm{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathrm{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant C \cdot |t| \longrightarrow \mathrm{dc}(m, >_{\mathbb{N}}) \in \mathcal{O}(m)$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \rightarrow) = \max\{n \mid t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(m, \rightarrow) = \max\{\mathsf{dh}(t, \rightarrow) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(m, >) \geqslant \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant C \cdot |t| \ \longrightarrow\ \mathsf{dc}(m, >_{\mathbb{N}}) \in \mathcal{O}(m) \ \longrightarrow\ \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{O}(m)$$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Lemma

$>$ *rewrite relation and* $\mathcal{R} \subseteq >$ $\longrightarrow$ $\mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}})$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant C \cdot |t| \;\longrightarrow\; \mathrm{dc}(m, >_{\mathbb{N}}) \in \mathcal{O}(m) \;\longrightarrow\; \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{O}(m)$$

Relative Termination

Definition

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{S}}^{*}$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Lemma (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Lemma (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Lemma (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Lemma (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$

Relative Termination

Definition

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow^*_{\mathcal{S}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$

Lemma (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_3 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_4 \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Relative Termination

Definition

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$

Lemma (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{S} \subseteq >$

$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \ldots$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{S}})$$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}})$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Relative Termination for Complexity

Question

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) \;\approx\; \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}})$

Proof idea

$$\binom{t_1}{t_1} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \binom{t_2}{t_2} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \binom{t_3}{t_3} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \binom{t_4}{t_4} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = ?$
$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = ?$
$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = ?$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;\approx\; \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}})$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = ?$
$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = ?$
$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = ?$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) \;\approx\; \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}})$$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = ?$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = ?$

Relative Termination for Complexity

Question

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) \;\approx\; \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}})$

Proof idea

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ ? \end{matrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$
$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$
$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \,?$

Relative Termination for Complexity

Question

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}})$$

Proof idea

$$\binom{t_1}{t_1} \begin{smallmatrix} > \\ ? \end{smallmatrix} \binom{t_2}{t_2} \begin{smallmatrix} \geqslant \\ > \end{smallmatrix} \binom{t_3}{t_3} \begin{smallmatrix} \geqslant \\ > \end{smallmatrix} \binom{t_4}{t_4} \begin{smallmatrix} > \\ ? \end{smallmatrix} \quad \cdots$$

Counterexample (Hofbauer, 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$
$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$
$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(2^m)$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})$$

Relative Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

Relative Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \;\approx\; \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \; \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \; \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \;\to_{\mathcal{R}}\; t_2 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_3 \;\to_{\mathcal{S}}\; t_4 \;\to_{\mathcal{R}}\; \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \quad \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \ \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \ \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}})$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \quad \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \cdots$$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$

Theorem

$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)})$

Modular Complexity

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) = \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$

Theorem

$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)})$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Modular Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) = \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$

Theorem

$\mathrm{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)})$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair,* $\mathcal{R} \subseteq >$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant$

Modular Complexity

Lemma

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) = \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$

Theorem

$\mathrm{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)})$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair,* $\mathcal{R} \subseteq >$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant \;\longrightarrow\; \mathrm{dc}(m, >) \geqslant \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}})$

Complexity Pairs

Triangular Matrix Interpretations (Moser et al. 2008)

$f_{\mathcal{M}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = F_1\vec{x}_1 + \cdots + F_n\vec{x}_n + \vec{f}$
where $F_i \in \mathbb{N}^{d \times d}$, $\vec{f} \in \mathbb{N}^d$, F_i upper triangular

Complexity Pairs

Triangular Matrix Interpretations (Moser et al. 2008)

$f_{\mathcal{M}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = F_1\vec{x}_1 + \cdots + F_n\vec{x}_n + \vec{f}$
where $F_i \in \mathbb{N}^{d \times d}$, $\vec{f} \in \mathbb{N}^d$, F_i upper triangular

Definition

$s >_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} > [t]_{\mathcal{M}}$ $\qquad$ $s \geqslant_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} \geqslant [t]_{\mathcal{M}}$

Complexity Pairs

Triangular Matrix Interpretations (Moser et al. 2008)

$f_{\mathcal{M}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = F_1\vec{x}_1 + \cdots + F_n\vec{x}_n + \vec{f}$
where $F_i \in \mathbb{N}^{d \times d}$, $\vec{f} \in \mathbb{N}^d$, F_i upper triangular

Definition

$s >_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} > [t]_{\mathcal{M}}$ $\qquad$ $s \geqslant_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} \geqslant [t]_{\mathcal{M}}$

Lemma

TMI $\mathcal{M}$ of dimension d

Complexity Pairs

Triangular Matrix Interpretations (Moser et al. 2008)

$f_{\mathcal{M}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = F_1\vec{x}_1 + \cdots + F_n\vec{x}_n + \vec{f}$
where $F_i \in \mathbb{N}^{d \times d}$, $\vec{f} \in \mathbb{N}^d$, F_i upper triangular

Definition

$s >_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} > [t]_{\mathcal{M}} \qquad s \geqslant_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} \geqslant [t]_{\mathcal{M}}$

Lemma

TMI $\mathcal{M}$ of dimension d $\longrightarrow$ $(>_{\mathcal{M}}, \geqslant_{\mathcal{M}})$ complexity pair

Complexity Pairs

Triangular Matrix Interpretations (Moser et al. 2008)

$f_{\mathcal{M}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = F_1 \vec{x}_1 + \cdots + F_n \vec{x}_n + \vec{f}$
where $F_i \in \mathbb{N}^{d \times d}$, $\vec{f} \in \mathbb{N}^d$, F_i upper triangular

Definition

$s >_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} > [t]_{\mathcal{M}} \qquad s \geqslant_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} \geqslant [t]_{\mathcal{M}}$

Lemma

TMI $\mathcal{M}$ of dimension d $\longrightarrow$ $(>_{\mathcal{M}}, \geqslant_{\mathcal{M}})$ complexity pair
furthermore $\mathrm{dc}(m, >_{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}(m^d)$

Complexity Pairs

Triangular Matrix Interpretations (Moser et al. 2008)

$f_{\mathcal{M}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = F_1\vec{x}_1 + \cdots + F_n\vec{x}_n + \vec{f}$
where $F_i \in \mathbb{N}^{d \times d}$, $\vec{f} \in \mathbb{N}^d$, F_i upper triangular

Definition

$s >_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} > [t]_{\mathcal{M}} \qquad s \geqslant_{\mathcal{M}} t \iff [s]_{\mathcal{M}} \geqslant [t]_{\mathcal{M}}$

Lemma

TMI $\mathcal{M}$ of dimension d $\longrightarrow$ $(>_{\mathcal{M}}, \geqslant_{\mathcal{M}})$ complexity pair
furthermore $\mathrm{dc}(m, >_{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}(m^d)$

Convention

TMI of dimension 1 $\longrightarrow$ SLI

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$\mathsf{ab} \longrightarrow \mathsf{baa}$

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$$ab \to baa \quad \xrightarrow{\textit{match}} \quad \begin{array}{ll} a_0b_0 \to b_1a_1a_1 & a_0b_1 \to b_1a_1a_1 \\ a_1b_0 \to b_1a_1a_1 & a_1b_1 \to b_2a_2a_2 \\ a_1b_2 \to b_2a_2a_2 & a_1b_2 \to b_2a_2a_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$$\mathsf{ab} \to \mathsf{baa} \quad \xrightarrow{match} \quad \begin{array}{ll} \mathsf{a}_0\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_0\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Termination

are labels in $\mathsf{lift}_0(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to^*_{match(\mathcal{R})} \cdot$ bounded by some $c \in \mathbb{N}$?

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$$\mathsf{ab} \to \mathsf{baa} \quad \xrightarrow{\mathit{match}} \quad \begin{array}{ll} \mathsf{a}_0\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_0\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Termination

labels in $\mathsf{lift}_0(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to^*_{\mathit{match}(\mathcal{R})} \cdot$ bounded by some $c \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx m$

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$$\mathsf{ab} \to \mathsf{baa} \quad \xrightarrow{\mathit{match}} \quad \begin{array}{ll} \mathsf{a}_0\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_0\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Termination

labels in $\mathsf{lift}_0(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to^*_{\mathit{match}(\mathcal{R})} \cdot$ bounded by some $c \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx m$

Matchbounds for $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ (Idea)

do not increase labels for non-length-increasing rules in $\mathcal{S}$

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$$\mathsf{ab} \to \mathsf{baa} \quad \xrightarrow{\mathit{match}} \quad \begin{array}{ll} \mathsf{a}_0\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_0\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Termination

labels in $\mathsf{lift}_0(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to^*_{\mathit{match}(\mathcal{R})} \cdot$ bounded by some $c \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx m$

Matchbounds for $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ (Idea)

do not increase labels for non-length-increasing rules in $\mathcal{S}$

$\mathcal{R}/\mathcal{S}$ match-rt bounded for $\mathcal{R}$

Complexity pairs cont'd (Matchbounds)

Idea

$$\mathsf{ab} \to \mathsf{baa} \quad \xrightarrow{match} \quad \begin{array}{ll} \mathsf{a}_0\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_0\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_0 \to \mathsf{b}_1\mathsf{a}_1\mathsf{a}_1 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_1 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 & \mathsf{a}_1\mathsf{b}_2 \to \mathsf{b}_2\mathsf{a}_2\mathsf{a}_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Termination

labels in $\mathsf{lift}_0(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to^*_{match(\mathcal{R})} \cdot$ bounded by some $c \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx m$

Matchbounds for $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ (Idea)

do not increase labels for non-length-increasing rules in $\mathcal{S}$

$\mathcal{R}/\mathcal{S}$ match-rt bounded for $\mathcal{R} \longrightarrow (\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}, \to_{\mathcal{S}})$ complexity pair

Beyond Complexity Pairs

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}) \approx \mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_2}) + m$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$

Beyond Complexity Pairs

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser & et al. 2008))

$\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}) \approx \mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_2}) + m$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Beyond Complexity Pairs

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser & et al. 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}) + m$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ *non-duplicating*

Corollary

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ *non-duplicating*

Beyond Complexity Pairs

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser & et al. 2008))

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_2}) + m$$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Corollary

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 / \mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}$ = Zantema/z086)

$$\mathsf{aa} \to \mathsf{cb} \qquad \mathsf{bb} \to \mathsf{ca} \qquad \mathsf{cc} \to \mathsf{ba}$$

Beyond Complexity Pairs

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser & et al. 2008))

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}) + m$$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ *non-duplicating*

Corollary

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ *non-duplicating*

Example ($\mathcal{R}$ = Zantema/z086)

$$\mathsf{aa} \to \mathsf{cb} \qquad \mathsf{bb} \to \mathsf{ca} \qquad \mathsf{cc} \to \mathsf{ba}$$

$\mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x$, $\mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = \mathsf{c}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$

Beyond Complexity Pairs

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser & et al. 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}) + m$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ *non-duplicating*

Corollary

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$

if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ *non-duplicating*

Example ($\mathcal{R}$ = Zantema/z086)

$\mathsf{aa} \to \mathsf{cb} \qquad \mathsf{bb} \to \mathsf{ca} \qquad \mathsf{cc} \to \mathsf{ba}$

$\mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x$, $\mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = \mathsf{c}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx \mathrm{dc}(m, \to_{\{\mathsf{aa}\to\mathsf{cb}\}/\{\mathsf{bb}\to\mathsf{ca},\mathsf{cc}\to\mathsf{ba}\}})$

Assessment

Lemma (Modular setting subsumes direct one)

$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq >$

Assessment

Lemma (Modular setting subsumes direct one)

$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq > \;\longrightarrow \exists$ *complexity pairs* $(>_i, \geqslant_i)$ *with*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_1$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_2$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_2$

Assessment

Lemma (Modular setting subsumes direct one)

$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq > \ \longrightarrow \exists$ *complexity pairs* $(>_i, \geqslant_i)$ *with*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_1$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_2$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_2$
furthermore $\mathsf{dc}(m, >) \approx \mathsf{dc}(m, >_1) + \mathsf{dc}(m, >_2)$

Assessment

Lemma (Modular setting subsumes direct one)

$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq > \ \longrightarrow \exists$ *complexity pairs* $(>_i, \geqslant_i)$ *with*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_1$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_2$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_2$
furthermore $\mathsf{dc}(m, >) \approx \mathsf{dc}(m, >_1) + \mathsf{dc}(m, >_2)$

Lemma (Equal power for SLIs)

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *SLIs*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_{\mathcal{A}_1}$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}_1}$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{A}_2}$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}_2}$

Assessment

Lemma (Modular setting subsumes direct one)

$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq > \quad \longrightarrow \exists$ *complexity pairs* $(>_i, \geqslant_i)$ *with*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_1$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_2$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_2$
furthermore $\mathrm{dc}(m, >) \approx \mathrm{dc}(m, >_1) + \mathrm{dc}(m, >_2)$

Lemma (Equal power for SLIs)

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *SLIs*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_{\mathcal{A}_1}$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}_1}$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{A}_2}$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}_2} \quad \longrightarrow \exists$ *SLI* $\mathcal{A}$ $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq >_{\mathcal{A}}$

Assessment

Lemma (Modular setting subsumes direct one)

$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq > \quad \longrightarrow \exists$ *complexity pairs* $(>_i, \geqslant_i)$ *with*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_1$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_2$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_2$
furthermore $\mathrm{dc}(m, >) \approx \mathrm{dc}(m, >_1) + \mathrm{dc}(m, >_2)$

Lemma (Equal power for SLIs)

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *SLIs*
$\mathcal{R}_1 \subseteq >_{\mathcal{A}_1}$, $\mathcal{R}_2 \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}_1}$
$\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{A}_2}$, $\mathcal{R}_1 \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}_2} \quad \longrightarrow \exists$ *SLI* $\mathcal{A}$ $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \subseteq >_{\mathcal{A}}$

Remark

above lemma does not hold for TMIs of dimension > 1

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Lemma

$\nexists$ *TMI* $\mathcal{M}$ *of dimension 2 with* $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathcal{M}}$

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Lemma

$\nexists$ TMI $\mathcal{M}$ of dimension 2 with $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathcal{M}}$

Proof

```
(benchmark ttt2 :logic QF_NIA :status unknown :extrafuns ((x13 Int) ... (x0 Int)) :assumption (>= x13 0) ...
:assumption (>= x0 0) :formula (and (and (and (and (and (and (and (>= (+ x0 (+ (* x2 x5) (* x3 x6))) (+ x0 (+
(* x2 (+ x7 (+ (* x9 x5) (* x10 x6)))) (* x3 (+ x8 (* x11 x6)))))) (>= (+ x1 (* x4 x6)) (+ x1 (* x4 (+ x8 (*
x11 x6)))))) (and (and (>= (+ x0 (+ (* x2 x0) (* x3 x1))) x0) (>= (+ x1 (* x4 x1)) x1)) (and (and (>= (* x2
x2) x2) (>= (+ (* x2 x3) (* x3 x4)) x3)) (>= (* x4 x4) x4)))) (and (>= (+ x7 (+ (* x9 x12) (* x10 x13))) (+
x7 (+ (* x9 (+ x0 (+ (* x2 x12) (* x3 x13)))) (* x10 (+ x1 (* x4 x13)))))) (>= (+ x8 (* x11 x13)) (+ x8 (*
x11 (+ x1 (* x4 x13))))))) (and (and (>= (+ x7 (+ (* x9 x7) (* x10 x8))) x7) (>= (+ x8 (* x11 x8)) x8)) (and
(and (>= (* x9 x9) x9) (>= (+ (* x9 x10) (* x10 x11)) x10)) (>= (* x11 x11) x11)))) (or (or (or (and (> (+ x0
(+ (* x2 x5) (* x3 x6))) (+ x0 (+ (* x2 (+ x7 (+ (* x9 x5) (* x10 x6)))) (* x3 (+ x8 (* x11 x6)))))) (and (>=
(+ x0 (+ (* x2 x5) (* x3 x6))) (+ x0 (+ (* x2 (+ x7 (+ (* x9 x5) (* x10 x6)))) (* x3 (+ x8 (* x11 x6)))))) (>
(+ x1 (* x4 x6)) (+ x1 (* x4 (+ x8 (* x11 x6))))))) (and (and (> (+ x0 (+ (* x2 x0) (* x3 x1))) x0) (and (>=
(+ x0 (+ (* x2 x0) (* x3 x1))) x0) (>= (+ x1 (* x4 x1)) x1))) (and (and (>= (* x2 x2) x2) (>= (+ (* x2 x3) (*
x3 x4)) x3)) (>= (* x4 x4) x4)))) (and (> (+ x7 (+ (* x9 x12) (* x10 x13))) (+ x7 (+ (* x9 (+ x0 (+ (* x2 x12
(* x3 x13)))) (* x10 (+ x1 (* x4 x13)))))) (and (>= (+ x7 (+ (* x9 x12) (* x10 x13))) (+ x7 (+ (* x9 (+ x0 (+
(* x2 x12) (* x3 x13)))) (* x10 (+ x1 (* x4 x13)))))) (>= (+ x8 (* x11 x13)) (+ x8 (* x11 (+ x1 (* x4 x13))))
)))) (and (and (> (+ x7 (+ (* x9 x7) (* x10 x8))) x7) (and (>= (+ x7 (+ (* x9 x7) (* x10 x8))) x7) (>= (+ x8
(* x11 x8)) x8))) (and (and (>= (* x9 x9) x9) (>= (+ (* x9 x10) (* x10 x11)) x10)) (>= (* x11 x11) x11))))) (
and (>= x2 1) (>= x9 1))) (and (and (>= 1 x2) (>= 1 x4)) (and (>= 1 x9) (>= 1 x11)))))
```

is not satisfiable

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$

Lemma

$\exists \mathcal{R}_i$ with $\bigcup \mathcal{R}_i = \mathcal{R}$ and $\mathcal{M}_i$ of dimension 2 such that $\mathcal{R}_i \subseteq >_{\mathcal{M}_i}$ and $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_i \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}_i}$

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Lemma

$\exists \mathcal{R}_i$ with $\bigcup \mathcal{R}_i = \mathcal{R}$ and $\mathcal{M}_i$ of dimension 2 such that $\mathcal{R}_i \subseteq >_{\mathcal{M}_i}$ and $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_i \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}_i}$

Proof

find concrete interpretations

Example ($\mathcal{R}$ = nontermin/AG01/#4.21)

$$\mathsf{f}(1) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(1)) \quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)) \to \mathsf{f}(x) \quad \mathsf{g}(0) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(0)) \quad \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{g}(x)$$

Lemma

$\exists \mathcal{R}_i$ with $\bigcup \mathcal{R}_i = \mathcal{R}$ and $\mathcal{M}_i$ of dimension 2 such that $\mathcal{R}_i \subseteq >_{\mathcal{M}_i}$ and $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_i \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}_i}$

Proof

find concrete interpretations

Corollary

modular setting strictly more powerful (in theory)

Example (nontermin/AG01/#4.28)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to) \leqslant 3n$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\, n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/4 \to^{2+n/8} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/8 \to^{2+n/16} \dots$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\, n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/4 \to^{2+n/8} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/8 \to^{2+n/16} \ldots$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}^m\, n, \to) \leqslant 6n + 3m + 24$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\, n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/4 \to^{2+n/8} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/8 \to^{2+n/16} \dots$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}^m\, n, \to) \leqslant 6n + 3m + 24$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\, n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n \to^{\leqslant 3 \log n} \mathsf{bits}^{m-2} \log^2 n \to^{\leqslant 3 \log^2 n} \dots$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{half}(0) &\to 0 \\
\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\
\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathsf{bits}(0) &\to 0 \\
\\
\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))
\end{aligned}
$$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to) = \mathcal{O}(m)$

Example (nontermin/AG01/#4.28 and TCT_09/bits)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to) = \mathcal{O}(m)$

Proof

find suitable SLIs and arctic matrices

Example (TRCSR/Ex16_Luc06_GM)

$$\begin{aligned} \mathsf{mark}(\mathsf{a}) &\to \mathsf{a} & \mathsf{g}(x,y) &\to \mathsf{f}(x,y) & \mathsf{c} &\to \mathsf{a} \\ \mathsf{mark}(\mathsf{b}) &\to \mathsf{c} & \mathsf{g}(x,x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) & \mathsf{c} &\to \mathsf{b} \\ \mathsf{mark}(\mathsf{f}(x,y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{mark}(x),y) \end{aligned}$$

Example (TRCSR/Ex16_Luc06_GM)

$$\begin{aligned} \mathsf{mark}(\mathsf{a}) &\to \mathsf{a} & \mathsf{g}(x,y) &\to \mathsf{f}(x,y) & \mathsf{c} &\to \mathsf{a} \\ \mathsf{mark}(\mathsf{b}) &\to \mathsf{c} & \mathsf{g}(x,x) &\to \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) & \mathsf{c} &\to \mathsf{b} \\ \mathsf{mark}(\mathsf{f}(x,y)) &\to \mathsf{g}(\mathsf{mark}(x),y) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to) = \mathcal{O}(m^2)$

Example (TRCSR/Ex16_Luc06_GM)

$$\mathsf{mark}(\mathsf{a}) \to \mathsf{a} \qquad \mathsf{g}(x,y) \to \mathsf{f}(x,y) \qquad \mathsf{c} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{mark}(\mathsf{b}) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,x) \to \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \qquad \mathsf{c} \to \mathsf{b}$$
$$\mathsf{mark}(\mathsf{f}(x,y)) \to \mathsf{g}(\mathsf{mark}(x),y)$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to) = \mathcal{O}(m^2)$

Proof

SLIs, TMIs of dimension 2, bounds
quadratic lower bound

Recall from yesterday

Example (Zantema/z126)

$$\mathsf{aba} \longrightarrow \mathsf{abba} \qquad \mathsf{bbb} \longrightarrow \mathsf{bb}$$

Recall from yesterday

Example (Zantema/z126)

$$\mathsf{aba} \to \mathsf{abba} \qquad \mathsf{bbb} \to \mathsf{bb}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to) = \mathcal{O}(m)$

Recall from yesterday

Example (Zantema/z126)

$$\mathsf{aba} \to \mathsf{abba} \qquad \mathsf{bbb} \to \mathsf{bb}$$

Lemma

$\mathrm{dc}(m, \to) = \mathcal{O}(m)$

alternative proof

find SLI and relative matchbounds

Recall from yesterday (2)

Example (Zantema/z009)

$$\mathsf{a} \to \mathsf{bc} \qquad \mathsf{ab} \to \mathsf{ba} \qquad \mathsf{dc} \to \mathsf{da} \qquad \mathsf{ac} \to \mathsf{ca}$$

Recall from yesterday (2)

Example (Zantema/z009)

$$\mathsf{a} \to \mathsf{bc} \qquad \mathsf{ab} \to \mathsf{ba} \qquad \mathsf{dc} \to \mathsf{da} \qquad \mathsf{ac} \to \mathsf{ca}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to) \in \mathcal{O}(m^4)$

Recall from yesterday (2)

Example (Zantema/z009)

$$\mathsf{a} \longrightarrow \mathsf{bc} \qquad \mathsf{ab} \longrightarrow \mathsf{ba} \qquad \mathsf{dc} \longrightarrow \mathsf{da} \qquad \mathsf{ac} \longrightarrow \mathsf{ca}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \longrightarrow) \in \mathcal{O}(m^4)$

alternative proof

find SLIs and TMIs of dimension 4

Recall from yesterday (3)

Example (SK90/4.30)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} & \mathsf{g}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\
\mathsf{f}(\mathsf{nil} \circ y) &\to \mathsf{nil} \circ \mathsf{f}(y) & \mathsf{g}(x \circ \mathsf{nil}) &\to \mathsf{g}(x) \circ \mathsf{nil} \\
\mathsf{f}((x \circ y) \circ z) &\to \mathsf{f}(x \circ (y \circ z)) & \mathsf{g}(x \circ (y \circ z)) &\to \mathsf{g}((x \circ y) \circ z)
\end{aligned}
$$

Recall from yesterday (3)

Example (SK90/4.30)

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} & \mathsf{g}(\mathsf{nil}) &\to \mathsf{nil} \\ \mathsf{f}(\mathsf{nil} \circ y) &\to \mathsf{nil} \circ \mathsf{f}(y) & \mathsf{g}(x \circ \mathsf{nil}) &\to \mathsf{g}(x) \circ \mathsf{nil} \\ \mathsf{f}((x \circ y) \circ z) &\to \mathsf{f}(x \circ (y \circ z)) & \mathsf{g}(x \circ (y \circ z)) &\to \mathsf{g}((x \circ y) \circ z) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{O}(m^3)$

Recall from yesterday (3)

Example (SK90/4.30)

$$\mathsf{f}(\mathsf{nil}) \to \mathsf{nil} \qquad \mathsf{g}(\mathsf{nil}) \to \mathsf{nil}$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{nil} \circ y) \to \mathsf{nil} \circ \mathsf{f}(y) \qquad \mathsf{g}(x \circ \mathsf{nil}) \to \mathsf{g}(x) \circ \mathsf{nil}$$
$$\mathsf{f}((x \circ y) \circ z) \to \mathsf{f}(x \circ (y \circ z)) \qquad \mathsf{g}(x \circ (y \circ z)) \to \mathsf{g}((x \circ y) \circ z)$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{O}(m^3)$

proof

find SLIs and TMIs of dimension 3

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time	timeout
direct	287	168	84	35	0.79	194
modular	312	193	90	29	1.45	347

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time	timeout
direct	287	168	84	35	0.79	194
modular	312	193	90	29	1.45	347

Facts

$\approx$ 15% ($\approx$ 9%) more linear (polynomial) bounds

Experiments (direct vs modular)

1172 non-duplicating TRSs from TPDB 7.0.2

	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	time	timeout
direct	287	168	84	35	0.79	194
modular	312	193	90	29	1.45	347

Facts

$\approx$ 15% ($\approx$ 9%) more linear (polynomial) bounds

Corollary

modular setting strictly more powerful (in practice)

Experiments (comparison with other tools)

Termination Competition 2009 (derivational complexity)

	points	$\mathcal{O}(n^k)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n^4)$
1. CaT	540	137	84	41	7	5
2. Matchbox	397	102	44	52	5	1
3. TCT	380	109	32	69	8	0

Conclusion

Modular Complexity via Relative Complexity

- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$
  if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Conclusion

Modular Complexity via Relative Complexity

- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$
  if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Conclusion

Modular Complexity via Relative Complexity

- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}}) \approx \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\varnothing})$
- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}})$
- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$
  if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Conclusion

Modular Complexity via Relative Complexity

- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}}) \approx \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\varnothing})$
- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}})$
- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$
  if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Complexity Pairs

triangular matrix interpretations, relative matchbounds, arctic matrix interpretations, beyond complexity pairs (weight gap principle)

Conclusion

Modular Complexity via Relative Complexity

- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$
  if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Complexity Pairs

triangular matrix interpretations, relative matchbounds, arctic matrix interpretations, beyond complexity pairs (weight gap principle)

Conclusion

Modular Complexity via Relative Complexity

- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\varnothing})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{S}})$
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2/\mathcal{S}}) \approx \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{S}}) + m$
  if $\mathcal{R}_2 \subseteq >_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}_1$ non-duplicating

Complexity Pairs

triangular matrix interpretations, relative matchbounds, arctic matrix interpretations, beyond complexity pairs (weight gap principle)

Conclusion

easy to implement, partial proofs, more powerful