The Derivational Complexity of the Bits Function and the Derivation Gap Principle

Harald Zankl Martin Korp

Institute of Computer Science
University of Innsbruck
Austria

WST 2010 (Edinburgh) 15 July 2010

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits, $\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits, $\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Question

How long can derivations in $\mathcal{R}_{bits}$ become?

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits, $\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Question

How long can derivations in $\mathcal{R}_{bits}$ become?

Example

$$\mathsf{half}(0) \quad \to 0$$

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits, $\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Question

How long can derivations in $\mathcal{R}_{bits}$ become?

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{bits}(0) &\to 0 \end{aligned}$$

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits, $\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Question

How long can derivations in $\mathcal{R}_{bits}$ become?

Example

$$\begin{aligned} &\mathsf{half}(0) \to 0 \\ &\mathsf{bits}(0) \to 0 \\ &\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)))) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(0)) \to \mathsf{s}(0) \end{aligned}$$

Motivation

Example (Strategy_removed_AG01/#4.28, TCT_09/bits, $\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Question

How long can derivations in $\mathcal{R}_{bits}$ become?

Example

$$\begin{aligned} &\mathsf{half}(0) \to 0 \\ &\mathsf{bits}(0) \to 0 \\ &\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)))) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(0)) \to \mathsf{s}(0) \end{aligned}$$

Overview

- Derivational Complexity
- The Bits System
  - Hand-made Proof
  - Automatic Proof
- Derivation Gap Principle
- Conclusion

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(m, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathrm{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathrm{dc}(m, \to) = \max\{\mathrm{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Example

$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\qquad$ $\mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$$\mathsf{dh}(t, \rightarrow) = \max\{n \mid t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow t_n\}$$

Definition (Derivational Complexity)

$$\mathsf{dc}(m, \rightarrow) = \max\{\mathsf{dh}(t, \rightarrow) \mid |t| \leqslant m\}$$

Example

$$\mathsf{a}(x) \rightarrow \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant 2 \cdot |t|$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(m, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant 2 \cdot |t| \quad \longrightarrow \mathsf{dc}(m, >_{\mathbb{N}}) = \mathcal{O}(m)$$

Derivational Complexity

Definition (Derivation Height)

$\mathsf{dh}(t, \to) = \max\{n \mid t = t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n\}$

Definition (Derivational Complexity)

$\mathsf{dc}(m, \to) = \max\{\mathsf{dh}(t, \to) \mid |t| \leqslant m\}$

Example

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \quad \mathsf{b}_{\mathbb{N}}(x) = x + 1$$

$$[t]_{\mathbb{N}} \leqslant 2 \cdot |t| \longrightarrow \mathsf{dc}(m, >_{\mathbb{N}}) = \mathcal{O}(m) \longrightarrow \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}}) = \mathcal{O}(m)$$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \rightarrow 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \rightarrow 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \rightarrow 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\ n, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Proof idea

bits n

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\, n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/2$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\ n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/4$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\, n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/4 \to^{2+n/8} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\, n/8$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\ n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/4 \to^{2+n/8} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/8 \to^{2+n/16} \dots$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Proof idea

$\mathsf{bits}\ n \to^{2+n/2} \mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/2 \to^{2+n/4} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/4 \to^{2+n/8} \mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{s}\,\mathsf{bits}\ n/8 \to^{2+n/16} \dots$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}\, n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathsf{dh}(\mathsf{bits}^m\, n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\, n$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\ n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\ n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n \to^{\leqslant 3 \log n} \mathsf{bits}^{m-2} \log^2 n$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$$

Lemma

$$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$$

Proof idea

$$\mathsf{bits}^m\ n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n \to^{\leqslant 3 \log n} \mathsf{bits}^{m-2} \log^2 n \to^{\leqslant 3 \log^2 n} \dots$$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\ n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n \to^{\leqslant 3 \log n} \mathsf{bits}^{m-2} \log^2 n \to^{\leqslant 3 \log^2 n} \dots$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m \qquad \forall n > 3$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\ n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n \to^{\leqslant 3n/2} \mathsf{bits}^{m-2} \log^2 n \to^{\leqslant 3n/4} \dots$

Hand-made Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 3n$

Lemma

$\mathrm{dh}(\mathsf{bits}^m\ n, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) \leqslant 6n + m + 24$

Proof idea

$\mathsf{bits}^m\ n \to^{\leqslant 3n} \mathsf{bits}^{m-1} \log n \to^{\leqslant 3n/2} \mathsf{bits}^{m-2} \log^2 n \to^{\leqslant 3n/4} \dots$

Hand-made Proof (cont'd)

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Hand-made Proof (cont'd)

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$

Hand-made Proof (cont'd)

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & & \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \end{aligned}$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$

Proof idea

derivations starting from $\mathsf{bits}^m\ n$ have maximal length

Hand-made Proof (cont'd)

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$

Proof idea

derivations starting from $\mathsf{bits}^m\, n$ have maximal length

Remark

automatic proof

Hand-made Proof (cont'd)

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$$

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$

Proof idea

derivations starting from $\mathsf{bits}^m\, n$ have maximal length

Remark

automatic proof $\longrightarrow$ via relative complexity [RTA'10]

Weight Gap Principle

Definitions

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ *non-duplicating*

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$

if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

( )

( )

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to^*_{\mathcal{S}} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to^*_{\mathcal{S}}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$$\mathrm{bits}(\mathrm{s}(x)) \not> \mathrm{s}(\mathrm{bits}(\mathrm{half}(\mathrm{s}(x)))) \qquad (\quad)$$

( )

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$

if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \not> \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$ ( )

$\mathsf{half}(0) > 0$ ( )

Weight Gap Principle

Definitions

$\rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \rightarrow^*_{\mathcal{S}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \not> \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x))))$ ( )

$\mathsf{half}(0) > 0$ $\mathsf{bits}(0) > 0$ ( )

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$$\mathrm{bits}(\mathrm{s}(x)) \not> \mathrm{s}(\mathrm{bits}(\mathrm{half}(\mathrm{s}(x)))) \qquad (\quad)$$

$$\mathrm{half}(0) > 0 \qquad \mathrm{bits}(0) > 0 \qquad (\quad)$$

$$\mathrm{half}(\mathrm{s}(0)) > 0$$

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ *non-duplicating*

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \not> \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \qquad (\quad)$$

$$\mathsf{half}(0) > 0 \qquad \mathsf{bits}(0) > 0 \qquad (\quad)$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) > 0 \qquad \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) > \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^* \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^*$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$$\mathrm{bits}(\mathrm{s}(x)) \not> \mathrm{s}(\mathrm{bits}(\mathrm{half}(\mathrm{s}(x)))) \qquad (\mathcal{R})$$

$$\mathrm{half}(0) > 0 \qquad \mathrm{bits}(0) > 0 \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathrm{half}(\mathrm{s}(0)) > 0 \qquad \mathrm{half}(\mathrm{s}(\mathrm{s}(x))) > \mathrm{s}(\mathrm{half}(x))$$

Weight Gap Principle

Definitions

$\to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}} = \to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ (relative rewriting)

$f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$ (SLI)

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$

if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Example ($\mathcal{R}_{bits} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$)

with $f_{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + 1 \quad \forall f$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \qquad (\mathcal{R})$$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0 \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$$

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$$

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$$

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_3 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_4 \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$$

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \quad \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_3 \rightarrow_{\mathcal{S}} t_4 \rightarrow_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$$

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \; \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \; \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Relative Complexity

Theorem (Geser 1990)

$$SN(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff SN(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \wedge SN(\mathcal{S})$$

Lemma

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \Theta(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}))$$

Proof idea

$\mathcal{R} \subseteq > \quad \mathcal{S} \subseteq \geqslant$

$\mathcal{R} \subseteq \geqslant \quad \mathcal{S} \subseteq >$

$$t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{S}} t_3 \to_{\mathcal{S}} t_4 \to_{\mathcal{R}} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geqslant \\ > \end{matrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ \geqslant \end{matrix} \cdots$$

Relative Complexity (cont'd)

Theorem

$$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$$

Relative Complexity (cont'd)

Theorem

$$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Relative Complexity (cont'd)

Theorem

$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair*

Relative Complexity (cont'd)

Theorem

$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair,* $\mathcal{R} \subseteq >$

Relative Complexity (cont'd)

Theorem

$$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair,* $\mathcal{R} \subseteq >$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant$

Relative Complexity (cont'd)

Theorem

$\mathsf{dc}(m, \to_{(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)/\mathcal{S}}) = \Theta(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_1/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_2)}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_2/(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}_1)}))$

Definition (Complexity Pair)

$(>, \geqslant)$ with rewrite relations $>$, $\geqslant$ and $> \cdot \geqslant \subseteq >$ and $\geqslant \cdot > \subseteq >$

Lemma

$(>, \geqslant)$ *complexity pair*, $\mathcal{R} \subseteq >$, $\mathcal{S} \subseteq \geqslant$ $\longrightarrow$ $\mathsf{dc}(m, >) \geqslant \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}})$

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$
$f_{\mathbb{A}}(x) = F \otimes x$ and $c_{\mathbb{A}} = \vec{c}$ (here $\oplus = \max$, $\otimes = +$)

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$

$f_{\mathbb{A}}(x) = F \otimes x$ and $c_{\mathbb{A}} = \vec{c}$ (here $\oplus = \max$, $\otimes = +$)

$F \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d \times d}$, $\vec{f} \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d}$, ...

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$
$f_{\mathbb{A}}(x) = F \otimes x$ and $c_{\mathbb{A}} = \vec{c}$ (here $\oplus = \max$, $\otimes = +$)
$F \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d \times d}$, $\vec{f} \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d}$, ...

Definition

$s >_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} > [t]_{\mathcal{A}}$ $s \geqslant_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} \geqslant [t]_{\mathcal{A}}$

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$
$f_{\mathbb{A}}(x) = F \otimes x$ and $c_{\mathbb{A}} = \vec{c}$ (here $\oplus = \max$, $\otimes = +$)
$F \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d \times d}$, $\vec{f} \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d}$, ...

Definition

$s >_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} > [t]_{\mathcal{A}}$ $s \geqslant_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} \geqslant [t]_{\mathcal{A}}$

Lemma

AMI $\mathbb{A}$ (dimension d)

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$
$f_{\mathbb{A}}(x) = F \otimes x$ and $c_{\mathbb{A}} = \vec{c}$ (here $\oplus = \max$, $\otimes = +$)
$F \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d \times d}$, $\vec{f} \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d}$, ...

Definition

$s >_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} > [t]_{\mathcal{A}}$ $\qquad s \geqslant_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} \geqslant [t]_{\mathcal{A}}$

Lemma

AMI $\mathbb{A}$ *(dimension d)* $\longrightarrow$ $(>_{\mathbb{A}}, \geqslant_{\mathbb{A}})$ *complexity pair*

Complexity Pairs

Arctic Matrix Interpretations (Waldmann, WST 2007)

AMI is matrix interpretation over arctic semi-ring $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$
$f_{\mathbb{A}}(x) = F \otimes x$ and $c_{\mathbb{A}} = \vec{c}$ (here $\oplus = \max$, $\otimes = +$)
$F \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^{d \times d}$, $\vec{f} \in (\mathbb{N} \cup \{-\infty\})^d$, ...

Definition

$s >_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} > [t]_{\mathcal{A}}$ $\qquad$ $s \geqslant_{\mathbb{A}} t \iff [s]_{\mathbb{A}} \geqslant [t]_{\mathcal{A}}$

Lemma

AMI $\mathbb{A}$ *(dimension d)* $\longrightarrow (>_{\mathbb{A}}, \geqslant_{\mathbb{A}})$ *complexity pair*
$\longrightarrow \mathrm{dc}(m, >_{\mathbb{A}}) = \mathcal{O}(m)$

Automated Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \qquad (\mathcal{R})$$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0 \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

Automated Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \qquad (\mathcal{R})$$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0 \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

with

$$[\mathsf{bits}](x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{half}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x$$

$$[\mathsf{s}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -\infty & 0 \end{pmatrix} x \qquad [0] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Automated Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) > \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \qquad (\mathcal{R})$$

$$\mathsf{half}(0) \geqslant 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \geqslant 0 \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \geqslant 0 \qquad \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \geqslant \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

with

$$[\mathsf{bits}](x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{half}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x$$

$$[\mathsf{s}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -\infty & 0 \end{pmatrix} x \qquad [0] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

yields

Automated Proof

Example ($\mathcal{R}_{bits}$)

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(x)) > \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{half}(\mathsf{s}(x)))) \qquad (\mathcal{R})$$

$$\mathsf{half}(0) \geqslant 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \geqslant 0 \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \geqslant 0 \qquad \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \geqslant \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

with

$$[\mathsf{bits}](x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{half}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} x$$

$$[\mathsf{s}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -\infty & 0 \end{pmatrix} x \qquad [0] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

yields

Lemma

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$

A Second Look at the Weight Gap Principle

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$
if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

A Second Look at the Weight Gap Principle

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$

if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ for SLI $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ non-duplicating

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$

A Second Look at the Weight Gap Principle

Lemma (Weight Gap Principle (Hirokawa & Moser 2008))

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + m)$

if $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{M}}$ *for SLI* $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ *non-duplicating*

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$
if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathrm{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathrm{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

SLIs

- $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ for SLI $\mathcal{A}$
- $\Delta = \max\{c_f \mid f \in \mathcal{F}\}$
- $\mathcal{R}$ non-duplicating
- $\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

SLIs

- $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ for SLI $\mathcal{A}$
- $\Delta = \max\{c_f \mid f \in \mathcal{F}\}$
- $\mathcal{R}$ non-duplicating
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

SLIs

- $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ for SLI $\mathcal{A}$
- $\Delta = \max\{c_f \mid f \in \mathcal{F}\}$
- $\mathcal{R}$ non-duplicating
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathrm{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathrm{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

SLIs

- $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ for SLI $\mathcal{A}$
- $\Delta = \max\{c_f \mid f \in \mathcal{F}\}$
- $\mathcal{R}$ non-duplicating
- $\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

SLIs

- $\mathcal{S} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ for SLI $\mathcal{A}$
- $\Delta = \max\{c_f \mid f \in \mathcal{F}\}$
- $\mathcal{R}$ non-duplicating
- $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

✓

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Omega(2^m)$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \rightarrow_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \rightarrow_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \rightarrow_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \rightarrow \mathsf{R}\}$ $\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \rightarrow \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \rightarrow \mathsf{L}, \mathsf{bL} \rightarrow \mathsf{La}\}$

$\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \Omega(2^m)$ $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \Omega(2^m)$ $\quad$ $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$ $\quad$ $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = ?$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \Omega(2^m) \qquad \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m) \qquad \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = ?$$

TMIs

$$[\mathsf{a}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [\mathsf{b}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{R}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [\mathsf{L}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathrm{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathrm{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\}$ $\qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} > \mathsf{bbR}, \mathsf{R} > \mathsf{L}, \mathsf{bL} > \mathsf{La}\}$

$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Omega(2^m)$ $\qquad \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$ $\qquad \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m^2)$

TMIs

$$[\mathsf{a}](x) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad [\mathsf{b}](x) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{R}](x) = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \qquad [\mathsf{L}](x) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} x$$

✗

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Omega(2^m) \qquad \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m) \qquad \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m^2)$$

AMIs

$$[\mathsf{a}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ 3 & 3 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{b}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} x$$

$$[\mathsf{R}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{L}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} x$$

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathrm{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathrm{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} > \mathsf{bbR}, \mathsf{R} > \mathsf{L}, \mathsf{bL} > \mathsf{La}\}$$

$$\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}) = \Omega(2^m) \qquad \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m) \qquad \mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$$

AMIs

$$[\mathsf{a}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ 3 & 3 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{b}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} x$$

$$[\mathsf{R}](x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \qquad [\mathsf{L}](x) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} x$$

✗

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Omega(2^m) \qquad \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m) \qquad \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$$

Match-bounds

$\mathcal{S}$ is match-bounded by 2

Derivation Gap Principle (cont'd)

Lemma (Derivation Gap Principle)

$$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) + \mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}))$$

if $\exists$ *constant* Δ *such that* $t \to_{\mathcal{R}} s$ *implies* $\mathsf{dh}(t, \to_{\mathcal{S}}) + \Delta \geqslant \mathsf{dh}(s, \to_{\mathcal{S}})$

Example (Hofbauer 2006)

$$\mathcal{R} = \{\mathsf{cL} \to \mathsf{R}\} \qquad \mathcal{S} = \{\mathsf{Ra} \to \mathsf{bbR}, \mathsf{R} \to \mathsf{L}, \mathsf{bL} \to \mathsf{La}\}$$

$\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}) = \Omega(2^m)$ $\quad$ $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$ $\quad$ $\mathsf{dc}(m, \to_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}(m)$

Match-bounds

$\mathcal{S}$ is match-bounded by 2

✗

Conclusion

Contributions

Conclusion

Contributions

- $\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)

Conclusion

Contributions

- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)
- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (automated proof)

Conclusion

Contributions

- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)
- $\mathsf{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (automated proof)
- derivation gap principle

Conclusion

Contributions

- $\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)
- $\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (automated proof)
- derivation gap principle

Future Work

find restrictions such that

adhere to derivation gap principle

Conclusion

Contributions

- $\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)
- $\mathrm{dc}(m, \to_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (automated proof)
- derivation gap principle

Future Work

find restrictions such that

- TMIs

adhere to derivation gap principle

Conclusion

Contributions

- $\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)
- $\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (automated proof)
- derivation gap principle

Future Work

find restrictions such that

- TMIs
- AMIs

adhere to derivation gap principle

Conclusion

Contributions

- $\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (hand-made proof)
- $\mathrm{dc}(m, \rightarrow_{\mathcal{R}_{bits}}) = \mathcal{O}(m)$ (automated proof)
- derivation gap principle

Future Work

find restrictions such that

- TMIs
- AMIs
- match-bounds

adhere to derivation gap principle