Term Rewriting — Lecture 4

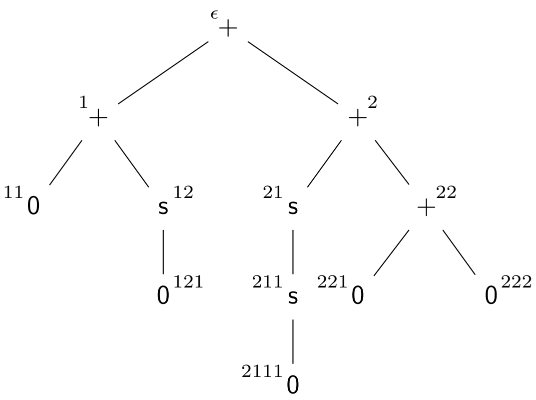
26S — April 13, 2026

All Solutions

1 (a) $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$

(b) $(0 + \mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0))) + (\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + (0 + 0))$

(c) From the tree



we infer

$$\begin{aligned}(t|_2[t|_1[t|_{22}]_{21}]_{11})|_1 &= (t|_2[(0+\mathsf{s}(0))[0+0]_{21}]_{11})|_1 = ((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + (0+0))[0+\mathsf{s}(0+0)]_{11})|_1 \\ &= (\mathsf{s}(0+\mathsf{s}(0+0)) + (0+0))|_1 = \mathsf{s}(0+\mathsf{s}(0+0))\end{aligned}$$

and

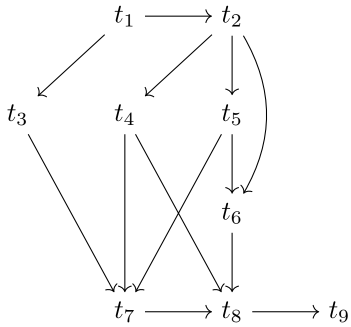
$$t|_{211}[t|_{121}]_1 = \mathsf{s}(0)[0]_1 = \mathsf{s}(0)$$

Hence $(t|_2[t|_1[t|_{22}]_{21}]_{11})|_1[t|_{211}[t|_{121}]_1]_{12} = \mathsf{s}(0+\mathsf{s}(0+0))[\mathsf{s}(0)]_{12} = \mathsf{s}(0+\mathsf{s}(0))$.

2 (a) We have the following rewrite sequence from $t = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \times \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$ to $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))))$ in $\mathcal{R}_1$:

$$\begin{aligned} t &\to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \to ((\mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \\ &\to (((0 \times \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \to ((0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \\ &\to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))))) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))))) \end{aligned}$$

(b) The following graph shows all reducts of $t_1 = \mathsf{s}(0) \times (0 + \mathsf{s}(0))$:



Here $t_2 = (0{\times}(0{+}\mathsf{s}(0))){+}(0{+}\mathsf{s}(0))$, $t_3 = \mathsf{s}(0){\times}\mathsf{s}(0)$, $t_4 = (0{\times}(0{+}\mathsf{s}(0))){+}\mathsf{s}(0)$, $t_5 = (0{\times}\mathsf{s}(0)){+}(0{+}\mathsf{s}(0))$, $t_7 = (0 \times \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0)$, $t_6 = 0 + (0 + \mathsf{s}(0))$, $t_8 = 0 + \mathsf{s}(0)$, and $t_9 = \mathsf{s}(0)$. From this graph we extract 22 rewrite sequences starting from t_1:

t_1
$t_1 \to t_2$
$t_1 \to t_2 \to t_4$
$t_1 \to t_2 \to t_4 \to t_7$
$t_1 \to t_2 \to t_4 \to t_7 \to t_8$
$t_1 \to t_2 \to t_4 \to t_7 \to t_8 \to t_9$

$t_1 \to t_2 \to t_4 \to t_8$
$t_1 \to t_2 \to t_4 \to t_8 \to t_9$

$t_1 \to t_2 \to t_5$
$t_1 \to t_2 \to t_5 \to t_6$
$t_1 \to t_2 \to t_5 \to t_6 \to t_8$

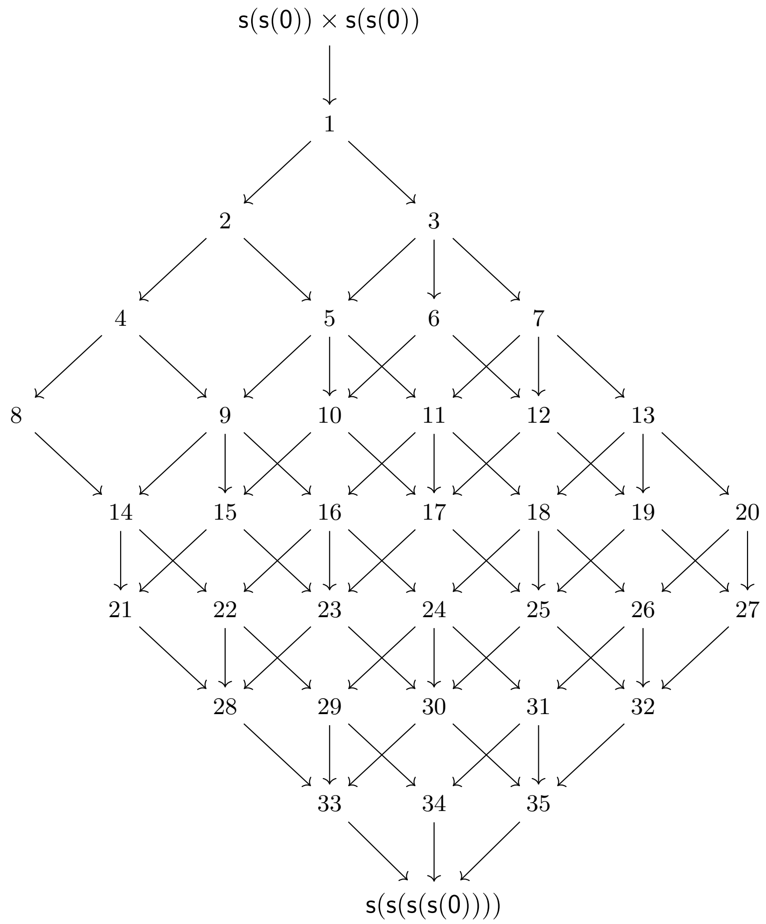
$t_1 \to t_2 \to t_5 \to t_7$
$t_1 \to t_2 \to t_5 \to t_7 \to t_8$
$t_1 \to t_2 \to t_5 \to t_7 \to t_8 \to t_9$

$t_1 \to t_2 \to t_6$
$t_1 \to t_2 \to t_6 \to t_8$
$t_1 \to t_2 \to t_6 \to t_8 \to t_9$

$t_1 \to t_3$
$t_1 \to t_3 \to t_7$
$t_1 \to t_3 \to t_7 \to t_8$
$t_1 \to t_3 \to t_7 \to t_8 \to t_9$
$t_1 \to t_2 \to t_5 \to t_6 \to t_8 \to t_9$

(c) By the form of the left-hand sides of the rewrite rules of $\mathcal{R}_1$, every term without $+$ and $\times$ is a normal form, and no ground normal form contains $+$ or $\times$. Hence the set of ground normal forms is simply $\mathcal{T}(\{0, \mathsf{s}\}) = \{0, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \ldots\}$.

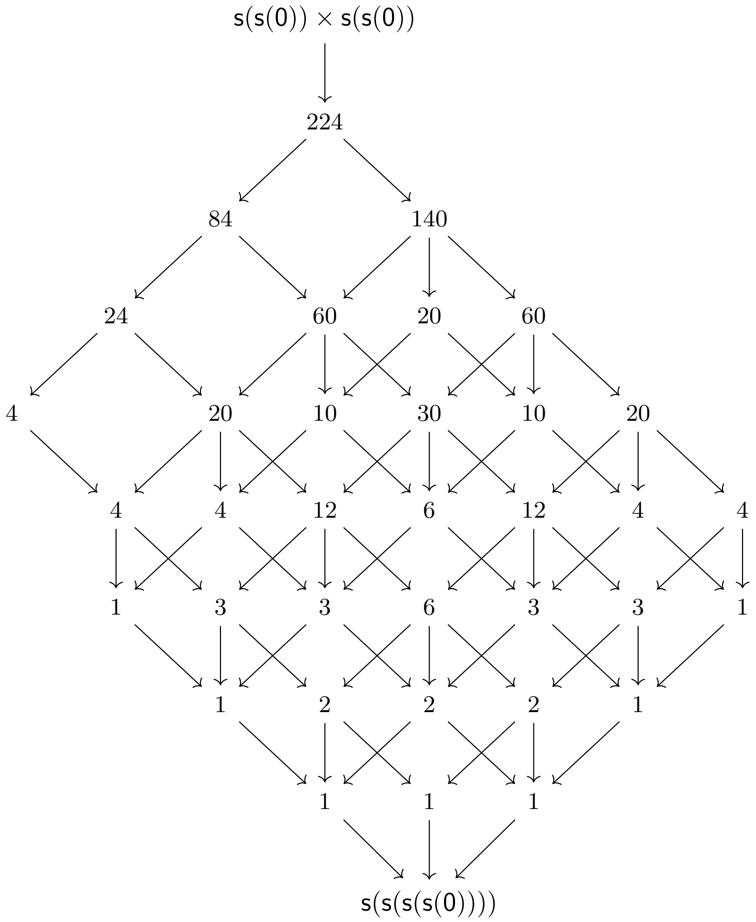
3 (a) We have



with

1: $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
2: $\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0))$
3: $((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
4: $\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times \mathsf{s}(0)) + 0))$
5: $\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(0)$
6: $(0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
7: $\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
8: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times \mathsf{s}(0)))$
9: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + 0))$
10: $\mathsf{s}((0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + \mathsf{s}(0))$
11: $\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0))$
12: $\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
13: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0 + 0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
14: $\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$
15: $\mathsf{s}(\mathsf{s}((0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + 0))$
16: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(0)) + 0))$
17: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0))$
18: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + 0)) + \mathsf{s}(0))$
19: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + 0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
20: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
21: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$
22: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + \mathsf{s}(0))))$
23: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0)) + 0))$
24: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + 0)) + 0))$
25: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + 0)) + \mathsf{s}(0))$
26: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0)) + \mathsf{s}(0))$
27: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$
28: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0))))$
29: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}((\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0) + 0))))$
30: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + 0)) + 0))$
31: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0)) + 0))$
32: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0))$
33: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + 0))))$
34: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times 0))))$
35: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + 0))$

(b) There are 224 rewrite sequences from $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \times \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$ to $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$. This can be seen by labeling the nodes in Figure 3.1 by the number of rewrite sequences to $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$, in a bottom-up fashion:



4 (a) We have $(x \cdot (y^- \cdot x)^-) \cdot y \to (x \cdot (x^- \cdot y^{--})) \cdot y \to y^{--} \cdot y \to y \cdot y$ and the normal form $y \cdot y$ is different from e. Hence the equation $(x \cdot (y^- \cdot x)^-) \cdot y \approx \mathsf{e}$ does not belong to the equational theory of the ES of Exercise 2.32.

(b) We have $(x \cdot x^-) \cdot ((y^- \cdot (\mathsf{e}^- \cdot x))^- \cdot y^-) \to^* \mathsf{e} \cdot ((y^- \cdot (\mathsf{e} \cdot x))^- \cdot y^-) \to^* (y^- \cdot x)^- \cdot y^- \to (x^- \cdot y^{--}) \cdot y^- \to (x^- \cdot y) \cdot y^- \to x^- \cdot (y \cdot y^-) \to x^- \cdot \mathsf{e} \to x^-$ and $(x^- \cdot \mathsf{e})^- \to x^{--} \to x$. Since x^- and x are different normal forms, the given equation does not belong to the equational theory of the ES of Exercise 2.32.

(c) Both sides rewrite to x^-: $(x^{--} \cdot (x \cdot (x \cdot \mathsf{e})^-))^- \to^* (x \cdot (x \cdot x^-))^- \to (x \cdot \mathsf{e})^- \to x^-$ and $x^{------} \to x^{---} \to x^-$. Hence the given equation belongs to the equational theory of the ES of Exercise 2.32.

5 (a) We split the proof of the validity of the equation $(x+1) \uparrow 2 \approx x \uparrow 2 + (2 \times x + 1)$ in $\mathcal{HSI}$ into 3 parts:

$$\dfrac{[\mathsf{t}]\ \dfrac{\overset{\Pi_1}{t_1 \approx t_{11}} \qquad \overset{\Pi_2}{t_{11} \approx t_{20}}}{t_1 \approx t_{20}} \qquad \overset{\Pi_3}{t_{20} \approx t_{28}}}{t_1 \approx t_{28}}\ [\mathsf{t}]$$

The proof tree Π_1 shows the validity of $(x+1)\uparrow 2 \approx (x\times x + x\times 1) + (x+1)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1\approx t_2}\,[\mathsf{a}] \qquad \dfrac{\dfrac{}{t_3\approx t_4}\,[\mathsf{a}] \quad \dfrac{}{t_3\approx t_4}\,[\mathsf{a}]}{t_2\approx t_5}\,[\mathsf{c}]}{t_1\approx t_5}\,[\mathsf{t}] \qquad \dfrac{\dfrac{}{t_5\approx t_6}\,[\mathsf{a}] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_7\approx t_8}\,[\mathsf{a}] \quad \dfrac{}{t_8\approx t_9}\,[\mathsf{a}]}{t_7\approx t_9}\,[\mathsf{t}] \qquad \dfrac{}{t_{10}\approx t_4}\,[\mathsf{a}]}{t_6\approx t_{11}}\,[\mathsf{c}]}{t_5\approx t_{11}}\,[\mathsf{t}]}{t_1\approx t_{11}}\,[\mathsf{t}]$$

The proof tree Π_2 shows the validity of $(x\times x + x\times 1) + (x+1) \approx x\uparrow 2 + (x + (x+1))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_{12}\approx t_{13}}\,[\mathsf{a}] \qquad \dfrac{\dfrac{}{t_{14}\approx t_{15}}\,[\mathsf{a}] \quad \dfrac{}{t_{14}\approx t_{15}}\,[\mathsf{a}]}{t_{13}\approx t_{16}}\,[\mathsf{c}]}{t_{12}\approx t_{16}}\,[\mathsf{t}]}{t_{16}\approx t_{12}}\,[\mathsf{s}] \qquad \dfrac{}{t_{17}\approx t_{15}}\,[\mathsf{a}]}{t_9\approx t_{18}}\,[\mathsf{c}] \qquad \dfrac{}{t_4\approx t_4}\,[\mathsf{r}]}{t_{11}\approx t_{19}}\,[\mathsf{c}] \qquad \dfrac{}{t_{19}\approx t_{20}}\,[\mathsf{a}]}{t_{11}\approx t_{20}}\,[\mathsf{t}]$$

The proof tree Π_3 shows the validity of $x\uparrow 2 + (x + (x+1)) \approx x\uparrow 2 + (x\times 2 + 1)$:

$$\dfrac{\dfrac{}{t_{12}\approx t_{12}}\,[\mathsf{r}] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_{21}\approx t_{22}}\,[\mathsf{a}] \qquad \dfrac{\dfrac{}{t_{17}\approx t_{15}}\,[\mathsf{a}] \quad \dfrac{}{t_{17}\approx t_{15}}\,[\mathsf{a}]}{t_{22}\approx t_{23}}\,[\mathsf{c}]}{t_{21}\approx t_{23}}\,[\mathsf{t}] \qquad \dfrac{}{t_{24}\approx t_{24}}\,[\mathsf{r}]}{t_{25}\approx t_{26}}\,[\mathsf{c}] \qquad \dfrac{}{t_{26}\approx t_{27}}\,[\mathsf{a}]}{t_{25}\approx t_{27}}\,[\mathsf{t}]}{t_{27}\approx t_{25}}\,[\mathsf{s}]}{t_{20}\approx t_{28}}\,[\mathsf{c}]$$

Here the following abbreviations are used:

$t_1 = (x+1)\uparrow 2$	$t_{15} = x$
$t_2 = (x+1)\uparrow 1 \times (x+1)\uparrow 1$	$t_{16} = x\times x$
$t_3 = (x+1)\uparrow 1$	$t_{17} = x\times 1$
$t_4 = x+1$	$t_{18} = x\uparrow 2 + x$
$t_5 = (x+1)\times(x+1)$	$t_{19} = (x\uparrow 2 + x) + (x+1)$
$t_6 = (x+1)\times x + (x+1)\times 1$	$t_{20} = x\uparrow 2 + (x + (x+1))$
$t_7 = (x+1)\times x$	$t_{21} = x\times 2$
$t_8 = x\times(x+1)$	$t_{22} = x\times 1 + x\times 1$
$t_9 = x\times x + x\times 1$	$t_{23} = x + x$
$t_{10} = (x+1)\times 1$	$t_{24} = 1$
$t_{11} = (x\times x + x\times 1) + (x+1)$	$t_{25} = x\times 2 + 1$
$t_{12} = x\uparrow 2$	$t_{26} = (x+x)+1$
$t_{13} = x\uparrow 1 + x\uparrow 1$	$t_{27} = x + (x+1)$
$t_{14} = x\uparrow 1$	$t_{28} = x\uparrow 2 + (x\times 2 + 1)$

(b) First note that

$$C \;=\; x^3+1 \;=\; (x+1)(x^2-x+1) \;=\; A(x^2-x+1)$$

and

$$D \;=\; x^4+x^2+1 \;=\; (x^2+x+1)(x^2-x+1) \;=\; B(x^2-x+1)$$

Hence

$$\begin{aligned}(C^y + D^y)^x &= \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} C^{yi} D^{y(x-i)} = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} A^{yi} B^{y(x-i)} (x^2 - x + 1)^{yx} \\ &= (A^y + B^y)^x (x^2 - x + 1)^{yx}\end{aligned}$$

and similarly

$$(C^x + D^x)^y = (A^x + B^x)^y (x^2 - x + 1)^{xy}$$

Since $(x^2 - x + 1)^{yx} = (x^2 - x + 1)^{xy} \geqslant 1$, we obtain the desired

$$(A^x + B^x)^y (C^y + D^y)^x = (A^y + B^y)^x (C^x + D^x)^y$$

(c) Consider the algebra $\mathcal{A}$ with carrier $A = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e, f, g, h\}$ and interpretations given in the following tables:

$+_\mathcal{A}$	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	4	4	2	3	d	3	3	3	3	4
2	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	2	3	4	4	b	4	b	3	h	3	3	4
b	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
c	d	3	4	4	b	4	b	3	3	3	3	4
d	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4
e	3	4	4	4	h	4	3	4	4	3	h	4
f	3	4	4	4	3	4	3	4	3	4	3	4
g	3	4	4	4	3	4	3	4	h	3	4	4
h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

$\times_\mathcal{A}$	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
2	2	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	a	b	4	4	c	b	c	b	h	4	4	4
b	b	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
c	c	b	4	4	c	b	c	b	4	4	4	4
d	d	4	4	4	b	4	b	4	4	4	4	4
e	e	4	4	4	h	4	4	4	4	4	h	4
f	f	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
g	g	4	4	4	4	4	4	4	h	4	4	4
h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

$\uparrow_\mathcal{A}$	1	2	3	4	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	4	4	4	4	4	4	f	4	4	4
3	3	4	4	4	e	4	4	4	g	4	e	h
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
a	a	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
b	b	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	4	4	4	f	4	4	4	4	4	4	4
e	e	4	4	4	4	4	4	4	h	4	4	4
f	f	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
g	g	4	4	4	h	4	4	4	4	4	h	4
h	h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

It is straightforward but tedious to check that $\mathcal{A}$ is a model of $\mathcal{HSI}$.