Term Rewriting — Lecture 6

26S — April 27, 2026

All Solutions

1 (a) The sequence

$$
\begin{aligned}
\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(x,y),x,y) \approx \mathsf{f}(z,\mathsf{g}(y,y),y)\} &\Rightarrow_{[\mathsf{d}]} \{\mathsf{g}(x,y) \approx z,\ x \approx \mathsf{g}(y,y),\ y \approx y\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{v}],\{z\mapsto \mathsf{g}(x,y)\}} \{x \approx \mathsf{g}(y,y),\ y \approx y\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{v}],\{x\mapsto \mathsf{g}(y,y)\}} \{y \approx y\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{t}]} \varnothing
\end{aligned}
$$

yields the mgu $\{z \mapsto \mathsf{g}(x,y)\}\{x \mapsto \mathsf{g}(y,y)\} = \{x \mapsto \mathsf{g}(y,y),\ z \mapsto \mathsf{g}(\mathsf{g}(y,y),y)\}$.

(b) The sequence

$$
\begin{aligned}
\{\mathsf{g}(\mathsf{h}(x),\mathsf{g}(x,y)) \approx \mathsf{g}(z,\mathsf{g}(\mathsf{g}(x,x),z))\} &\Rightarrow_{[\mathsf{d}]} \{\mathsf{h}(x) \approx z,\ \mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{g}(\mathsf{g}(x,x),z)\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{v}]} \{\mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{g}(\mathsf{g}(x,x),\mathsf{h}(x))\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{d}]} \{x \approx \mathsf{g}(x,x),\ y \approx \mathsf{h}(x)\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{v}]} \{x \approx \mathsf{g}(x,x)\}
\end{aligned}
$$

shows that $\mathsf{g}(\mathsf{h}(x),\mathsf{g}(x,y))$ and $\mathsf{g}(z,\mathsf{g}(\mathsf{g}(x,x),z))$ are not unifiable.

(c) The terms $\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x,y),\mathsf{h}(y))$ and $\mathsf{f}(\mathsf{g}(z,z),x,x)$ are not unifiable:

$$
\begin{aligned}
\{\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x,y),\mathsf{h}(y)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{g}(z,z),x,x)\} &\Rightarrow_{[\mathsf{d}]} \{x \approx \mathsf{g}(z,z),\ \mathsf{g}(x,y) \approx x,\ \mathsf{h}(y) \approx x\}\\
&\Rightarrow_{[\mathsf{v}]} \{\mathsf{h}(y) \approx \mathsf{g}(z,z),\ \mathsf{g}(\mathsf{h}(y),y) \approx \mathsf{h}(y)\}
\end{aligned}
$$

2 We use LPO with precedence $\neg > \wedge > \vee$:

$$
\dfrac{\dfrac{x \wedge y >_{\mathsf{lpo}} x\ \langle 3,1\rangle}{\neg(x \wedge y) >_{\mathsf{lpo}} \neg x\ \langle 1,1\rangle} \qquad \dfrac{x \wedge y >_{\mathsf{lpo}} y\ \langle 3,2\rangle}{\neg(x \wedge y) >_{\mathsf{lpo}} \neg y\ \langle 1,1\rangle}}{\neg(x \wedge y) >_{\mathsf{lpo}} (\neg x) \vee (\neg y)\ \langle 2\rangle}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{x \vee y >_{\mathsf{lpo}} x\ \langle 3,1\rangle}{\neg(x \vee y) >_{\mathsf{lpo}} \neg x\ \langle 1,1\rangle} \qquad \dfrac{x \vee y >_{\mathsf{lpo}} y\ \langle 3,2\rangle}{\neg(x \vee y) >_{\mathsf{lpo}} \neg y\ \langle 1,1\rangle}}{\neg(x \vee y) >_{\mathsf{lpo}} (\neg x) \wedge (\neg y)\ \langle 2\rangle}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{y \vee z >_{\mathsf{lpo}} y\ \langle 3,1\rangle}{x \wedge (y \vee z) >_{\mathsf{lpo}} x \wedge y\ \langle 1,2\rangle} \qquad \dfrac{y \vee z >_{\mathsf{lpo}} z\ \langle 3,2\rangle}{x \wedge (y \vee z) >_{\mathsf{lpo}} x \wedge z\ \langle 1,2\rangle}}{x \wedge (y \vee z) >_{\mathsf{lpo}} (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\ \langle 2\rangle}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{x \vee y >_{\mathsf{lpo}} x\ \langle 3,1\rangle}{(x \vee y) \wedge z >_{\mathsf{lpo}} x \wedge z\ \langle 1,1\rangle} \qquad \dfrac{x \vee y >_{\mathsf{lpo}} y\ \langle 3,2\rangle}{(x \vee y) \wedge z >_{\mathsf{lpo}} y \wedge z\ \langle 1,1\rangle}}{(x \vee y) \wedge z >_{\mathsf{lpo}} (x \wedge z) \vee (y \wedge z)\ \langle 2\rangle}
$$

$$
\dfrac{\neg x >_{\mathsf{lpo}} x\ \langle 3,1\rangle}{\neg(\neg x) >_{\mathsf{lpo}} x\ \langle 3,1\rangle}
$$

3 (a) If $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t)$ is not a subset of $\mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$ then there exists a variable $x \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(t) \setminus \mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$. Consider the substitution $\sigma = \{x \mapsto s\}$. Because $>_{\mathsf{lpo}}$ is closed under substitutions, we infer $s = s\sigma >_{\mathsf{lpo}} t\sigma$ from $s >_{\mathsf{lpo}} t$. Clearly $t\sigma \trianglerighteq s$ and thus $t\sigma >_{\mathsf{lpo}}^{=} s$ by the subterm property, contradicting $s >_{\mathsf{lpo}} t\sigma$.

(b) If $s >_{\mathsf{lpo}} t$ then $s \neq t$ because $>_{\mathsf{lpo}}$ is irreflexive. Part (a) of this exercise states $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$, i.e., $t \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$. Conversely, if $s \neq t$ and $t \in \mathcal{V}\mathsf{ar}(s)$ then $s \vartriangleright t$ and thus $s >_{\mathsf{lpo}} t$ by the subterm property.

4 (a) There are two critical pairs: $\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y,y)) \approx x$ and $\mathsf{g}(\mathsf{f}(x,x)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{g}(x))$, stemming from the overlaps $\langle \mathsf{g}(\mathsf{g}(y)) \to \mathsf{f}(y,y), 2, \mathsf{f}(x, \mathsf{g}(z)) \to x \rangle$ and $\langle \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x,x), 1, \mathsf{g}(\mathsf{g}(y)) \to \mathsf{f}(y,y) \rangle$.

(b) No. The first critical pair is not joinable as $\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y,y))$ and x are different normal forms. Hence $\mathcal{R}$ is not locally confluent.

5 No. The critical pair $\mathsf{gcd}(\mathsf{s}(x+y), \mathsf{s}(x)) \approx \mathsf{gcd}(\mathsf{s}(x), y)$ is not joinable as it consists of different normal forms. Hence $\mathcal{R}$ is not (locally) confluent.