Term Rewriting — Lecture 7

26S — May 4, 2026

All Solutions

1 (a) Let us number the rewrite rules:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\mathsf{e} \cdot x & \xrightarrow{1} & x & x \cdot \mathsf{e} & \xrightarrow{6} & x \\
x^- \cdot x & \xrightarrow{2} & \mathsf{e} & x \cdot x^- & \xrightarrow{7} & \mathsf{e} \\
(x \cdot y) \cdot z & \xrightarrow{3} & x \cdot (y \cdot z) & x^{--} & \xrightarrow{8} & x \\
\mathsf{e}^- & \xrightarrow{4} & \mathsf{e} & (x \cdot y)^- & \xrightarrow{9} & y^- \cdot x^- \\
x^- \cdot (x \cdot y) & \xrightarrow{5} & y & x \cdot (x^- \cdot y) & \xrightarrow{10} & y
\end{array}$$

There are 48 critical pairs (modulo renaming) originating from 55 overlaps:

Critical pair	Overlaps
$\mathsf{e} \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}$	$\langle 6,\epsilon,1\rangle$ $\langle 1,\epsilon,6\rangle$
$\mathsf{e} \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}^-$	$\underline{\langle 7,\epsilon,1\rangle}$ $\underline{\langle 2,\epsilon,6\rangle}$
$y \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}^- \cdot y$	$\underline{\langle 10,\epsilon,1\rangle}$
$\mathsf{e}^- \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}$	$\underline{\langle 6,\epsilon,2\rangle}$ $\underline{\langle 1,\epsilon,7\rangle}$ $\langle 4,1,8\rangle$
$\mathsf{e} \cdot \mathsf{e} \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}$	$\langle 4,1,2\rangle$ $\langle 4,2,7\rangle$
$x \cdot x^- \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}$	$\langle 8,1,2\rangle$ $\langle 6,2,10\rangle$
$(y^- \cdot x^-) \cdot (x \cdot y) \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e}$	$\langle 9,1,2\rangle$
$x \cdot y \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot (y \cdot \mathsf{e})$	$\langle 6,\epsilon,3\rangle$
$\mathsf{e} \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot (y \cdot (x \cdot y)^-)$	$\underline{\langle 7,\epsilon,3\rangle}$
$z \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot (y \cdot ((x \cdot y)^- \cdot z))$	$\underline{\langle 10,\epsilon,3\rangle}$
$x \cdot z \leftarrow\rtimes\rightarrow \mathsf{e} \cdot (x \cdot z)$	$\langle 1,1,3\rangle$
$\mathsf{e} \cdot z \leftarrow\rtimes\rightarrow x^- \cdot (x \cdot z)$	$\langle 2,1,3\rangle$
$(x \cdot (y \cdot z)) \cdot w \leftarrow\rtimes\rightarrow (x \cdot y) \cdot (z \cdot w)$	$\langle 3,1,3\rangle$
$y \cdot z \leftarrow\rtimes\rightarrow x^- \cdot ((x \cdot y) \cdot z)$	$\langle 5,1,3\rangle$
$x \cdot z \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot (\mathsf{e} \cdot z)$	$\langle 6,1,3\rangle$
$\mathsf{e} \cdot z \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot (x^- \cdot z)$	$\langle 7,1,3\rangle$
$y \cdot z \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot ((x^- \cdot y) \cdot z)$	$\langle 10,1,3\rangle$
$\mathsf{e} \cdot (\mathsf{e} \cdot y) \leftarrow\rtimes\rightarrow y$	$\langle 4,1,5\rangle$
$x \cdot (x^- \cdot y) \leftarrow\rtimes\rightarrow y$	$\langle 8,1,5\rangle$
$(y^- \cdot x^-) \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \leftarrow\rtimes\rightarrow z$	$\langle 9,1,5\rangle$
$\mathsf{e}^- \cdot y \leftarrow\rtimes\rightarrow y$	$\langle 1,2,5\rangle$
$x^{--} \cdot \mathsf{e} \leftarrow\rtimes\rightarrow x$	$\langle 2,2,5\rangle$
$(x \cdot y)^- \cdot (x \cdot (y \cdot z)) \leftarrow\rtimes\rightarrow z$	$\langle 3,2,5\rangle$
$x^{--} \cdot y \leftarrow\rtimes\rightarrow x \cdot y$	$\langle 5,2,5\rangle$

$x^- \cdot x \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{e}$	$\langle 6,2,5\rangle \quad \langle 8,2,7\rangle$
$x^- \cdot \mathsf{e} \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^-$	$\langle 7,2,5\rangle$
$x^- \cdot y \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^- \cdot y$	$\langle 10,2,5\rangle$
$x \cdot (y \cdot \mathsf{e}) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x \cdot y$	$\langle 3,\epsilon,6\rangle$
$x \cdot (y \cdot (x \cdot y)^-) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{e}$	$\underline{\langle 3,\epsilon,7\rangle}$
$(x \cdot y) \cdot (y^- \cdot x^-) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{e}$	$\langle 9,2,7\rangle$
$x^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^-$	$\langle 8,1,8\rangle$
$(y^- \cdot x^-)^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x \cdot y$	$\langle 9,1,8\rangle$
$x^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^- \cdot \mathsf{e}^-$	$\langle 1,1,9\rangle$
$\mathsf{e}^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^- \cdot x^{--}$	$\langle 2,1,9\rangle$
$(x \cdot (y \cdot z))^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow z^- \cdot (x \cdot y)^-$	$\langle 3,1,9\rangle$
$y^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow (x \cdot y)^- \cdot x^{--}$	$\langle 5,1,9\rangle$
$\mathsf{e}^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{e}^- \cdot x^-$	$\langle 6,1,9\rangle$
$\mathsf{e}^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^{--} \cdot x$	$\langle 7,1,9\rangle$
$y^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow (x^- \cdot y)^- \cdot x^-$	$\langle 10,1,9\rangle$
$\mathsf{e}^- \cdot y \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow y$	$\underline{\langle 1,\epsilon,10\rangle}$
$x \cdot (y \cdot ((x \cdot y)^- \cdot z)) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow z$	$\underline{\langle 3,\epsilon,10\rangle}$
$x \cdot \mathsf{e} \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x$	$\langle 2,2,10\rangle$
$x \cdot y \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x \cdot y$	$\langle 5,2,10\rangle$
$x \cdot \mathsf{e} \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^{--}$	$\underline{\langle 7,2,10\rangle}$
$x \cdot z \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow x^{--} \cdot z$	$\underline{\langle 10,2,10\rangle}$
$\mathsf{e} \cdot (\mathsf{e} \cdot y) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow y$	$\langle 4,21,10\rangle$
$x^- \cdot (x \cdot y) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow y$	$\langle 8,21,10\rangle$
$(x \cdot y) \cdot ((y^- \cdot x^-) \cdot z) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow z$	$\langle 9,21,10\rangle$

(b) The critical pairs derived from the underlined overlaps in part (a) are *not* prime. Note that the critical pair $\mathsf{e}^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{e}$ is prime due to the overlap $\langle 4,1,8\rangle$, but not prime if generated from the overlaps $\langle 6,\epsilon,2\rangle$ or $\langle 1,\epsilon,7\rangle$. For the result of Corollary 5.1.17, it is safe to assume that $\mathsf{e}^- \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{e}$ is *not* prime.

2 No. Consider the TRS $\mathcal{R}$ consisting of the rewrite rules

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \mathsf{b} \qquad\qquad \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \mathsf{c} \qquad\qquad \mathsf{a} \to \mathsf{a}$$

The prime critical pairs $\mathsf{f}(\mathsf{a}) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{b}$ and $\mathsf{f}(\mathsf{a}) \leftarrow\!\rtimes\!\rightarrow \mathsf{c}$ are trivially joinable, but $\mathcal{R}$ is not locally confluent since $\mathsf{b} \leftarrow \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \mathsf{c}$ and b and c are different normal forms. Note that the critical peak $\mathsf{b} \xleftarrow{\epsilon} \mathsf{f}(\mathsf{a}) \xrightarrow{\epsilon} \mathsf{c}$ does not correspond to a prime critical pair because a is not a normal form.

3 As reduction order we take LPO with precedence $\mathsf{d} > -$, $\mathsf{d} > \mathsf{p}$ and $\mathsf{d} > \mathsf{s}$. We write $\mathcal{R}_i$ and C_i for the values of $\mathcal{R}$ and C after i iterations of the while loop. We have $\mathcal{R}_0 = \varnothing$ and C_0 consists of the given equations:

$$\mathsf{d}(0,y) \approx -y \quad \text{(a)} \qquad\qquad \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \approx x \quad \text{(d)}$$
$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \approx \mathsf{d}(x,y) \quad \text{(b)} \qquad\qquad \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \approx x \quad \text{(e)}$$
$$\mathsf{d}(\mathsf{p}(x),\mathsf{p}(y)) \approx \mathsf{d}(x,y) \quad \text{(c)}$$

In the first iteration we select equation (a), so $s = \mathsf{d}(0,y)$ and $t = -y$. Since $\mathcal{R}_0 = \varnothing$, $s' = s$ and $t' = t$. Because $s' > t'$ we obtain $\mathcal{S}_0 = \{\mathsf{d}(0,y) \to -y\}$. We have $\mathsf{CP}(\mathcal{R}_0,\mathcal{S}_0) = \mathsf{CP}(\mathcal{S}_0,\mathcal{R}_0) = \mathsf{CP}(\mathcal{S}_0) = \varnothing$. Hence

$C_1 = \{(b), (c), (d), (e)\}$ and $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{S}_0 = \{1\}$:

$$\mathsf{d}(0, y) \xrightarrow{1} -y$$

Next we select equation (b). Using the same steps as before, at the end of the second iteration we have $C_2 = \{(c), (d), (e)\}$ and $\mathcal{R}_2 = \{1, 2\}$ with

$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \xrightarrow{2} \mathsf{d}(x, y)$$

In the third iteration we select equation (c), resulting in $C_3 = \{(d), (e)\}$ and $\mathcal{R}_3 = \{1, 2, 3\}$ with

$$\mathsf{d}(\mathsf{p}(x), \mathsf{p}(y)) \xrightarrow{3} \mathsf{d}(x, y)$$

Next we select equation (d) and obtain $\mathcal{S}_3 = \{\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x\}$. We have $\mathsf{CP}(\mathcal{R}_3, \mathcal{S}_3) = \mathsf{CP}(\mathcal{S}_3) = \varnothing$ and $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_3, \mathcal{R}_3) = \{(f), (g)\}$ with

$$\mathsf{d}(x, \mathsf{s}(y)) \approx \mathsf{d}(\mathsf{p}(x), y) \quad \text{(f)} \qquad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), y) \approx \mathsf{d}(x, \mathsf{p}(y)) \quad \text{(g)}$$

Consequently, $C_4 = \{(e), (f), (g)\}$ and $\mathcal{R}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ with

$$\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \xrightarrow{4} x$$

Next we select (e) and obtain $\mathcal{S}_4 = \{\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x\}$. We have $\mathsf{CP}(\mathcal{R}_4, \mathcal{S}_4) = \{(h)\}$, $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_4) = \varnothing$ and $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_4, \mathcal{R}_4) = \{(i), (j), (k)\}$ with

$$\mathsf{p}(x) \approx \mathsf{p}(x) \quad \text{(h)} \qquad \mathsf{d}(\mathsf{p}(x), y) \approx \mathsf{d}(x, \mathsf{s}(y)) \quad \text{(j)}$$

$$\mathsf{d}(x, \mathsf{p}(y)) \approx \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), y) \quad \text{(i)} \qquad \mathsf{s}(x) \approx \mathsf{s}(x) \quad \text{(k)}$$

Hence $C_5 = \{(f), (g), (h), (i), (j), (k)\}$ and $\mathcal{R}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ with

$$\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \xrightarrow{5} x$$

After selecting the trivial equations (h) and (k), two iterations later we have $C_7 = \{(f), (g), (i), (j)\}$ and $\mathcal{R}_7 = \mathcal{R}_5$. Next we select equation (f). With the given LPO we obtain $\mathcal{S}_7 = \{\mathsf{d}(\mathsf{p}(x), y) \to \mathsf{d}(x, \mathsf{s}(y))\}$, $\mathsf{CP}(\mathcal{R}_7, \mathcal{S}_7) = \{(l), (m)\}$, $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_7) = \varnothing$ and $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_7, \mathcal{R}_7) = \{(n)\}$ with

$$\mathsf{d}(x, y) \approx \mathsf{d}(x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(y))) \quad \text{(l)} \qquad \mathsf{d}(x, \mathsf{s}(\mathsf{p}(y))) \approx \mathsf{d}(x, y) \quad \text{(n)}$$

$$\mathsf{d}(x, y) \approx \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \quad \text{(m)}$$

Hence $C_8 = \{(g), (i), (j), (l), (m), (n)\}$ and $\mathcal{R}_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ with

$$\mathsf{d}(\mathsf{p}(x), y) \xrightarrow{6} \mathsf{d}(x, \mathsf{s}(y))$$

Selecting equation (g) results in $\mathcal{S}_8 = \{\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{d}(x, \mathsf{p}(y))\}$, $\mathsf{CP}(\mathcal{R}_8, \mathcal{S}_8) = \{(l), (o)\}$, $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_8) = \varnothing$ and $\mathsf{CP}(\mathcal{S}_8, \mathcal{R}_8) = \{(p)\}$ with

$$\mathsf{d}(x, y) \approx \mathsf{d}(\mathsf{p}(x), \mathsf{p}(y)) \quad \text{(o)} \qquad \mathsf{d}(x, \mathsf{p}(\mathsf{s}(y))) \approx \mathsf{d}(x, y) \quad \text{(p)}$$

Hence $C_9 = \{(i), (j), (l), (m), (n), (o), (p)\}$ and $\mathcal{R}_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ with

$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), y) \xrightarrow{7} \mathsf{d}(x, \mathsf{p}(y))$$

Next we select equation (i). So $s = \mathsf{d}(x, \mathsf{p}(y))$ and $t = \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), y)$. Since $t \xrightarrow{7} s$, $s' = t'$ and so no new critical pairs are computed. The same holds for the other equations in C_9. So after seven more iterations we have $C_{16} = \varnothing$ and $\mathcal{R}_{16} = \mathcal{R}_9$, and the while loop is exited.