universität innsbruck

Term Rewriting — Lecture 10

26S — June 1, 2026

All Solutions

1 $\boxed{1}$ $\epsilon(\epsilon(\mathsf{s}(0)))$, $\epsilon(\mathsf{s}(\epsilon(0)))$ and $\mathsf{s}(\epsilon(\epsilon(0)))$

$\boxed{2}$ $\alpha(0) + \alpha(0+0)$ and $\alpha(0) + (0 + \alpha(0))$

$\boxed{3}$ $\alpha(0) + \alpha(\alpha(0))$

$\boxed{4}$ $\delta(0 \times \alpha(0), \alpha(0))$

2 (a) We have

$$\begin{aligned}
\mathsf{src}(A) &= \mathsf{lhs}(\sigma)\langle \mathsf{src}(\mathsf{KSI}), \mathsf{src}(\iota(\mathsf{I})), \mathsf{src}(\mathsf{IK})\rangle_\sigma(\mathsf{KKI}) \\
&= (\mathsf{S}xyz)\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto \mathsf{lhs}(\iota)\langle \mathsf{src}(\mathsf{I})\rangle_\iota, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= (\mathsf{S}xyz)\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto (\mathsf{I}x)\{x \mapsto \mathsf{I}\}, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= (\mathsf{S}xyz)\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto \mathsf{II}, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})(\mathsf{IK})(\mathsf{KKI}) \\
\mathsf{src}(B) &= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})(\mathsf{lhs}(\iota)\langle \mathsf{src}(\mathsf{K})\rangle_\iota)(\mathsf{lhs}(\kappa)\langle \mathsf{src}(\mathsf{K}), \mathsf{src}(\mathsf{I})\rangle_\kappa) \\
&= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})((\mathsf{I}x)\{x \mapsto \mathsf{K}\})((\mathsf{K}xy)\{x \mapsto \mathsf{K}, y \mapsto \mathsf{I}\}) \\
&= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})(\mathsf{IK})(\mathsf{KKI}) \\
\mathsf{src}(C) &= \mathsf{lhs}(\sigma)\langle \mathsf{src}(\kappa(\mathsf{S},\mathsf{I})), \mathsf{src}(\iota(\mathsf{I})), \mathsf{src}(\iota(\mathsf{K}))\rangle_\sigma(\mathsf{KKI}) \\
&= (\mathsf{S}xyz)\{x \mapsto \mathsf{lhs}(\kappa)\langle \mathsf{S},\mathsf{I}\rangle_\kappa, y \mapsto \mathsf{lhs}(\iota)\langle \mathsf{src}(\mathsf{I})\rangle_\iota, z \mapsto \mathsf{lhs}(\iota)\langle \mathsf{src}(\mathsf{K})\rangle_\iota\}(\mathsf{KKI}) \\
&= (\mathsf{S}xyz)\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto \mathsf{II}, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})(\mathsf{IK})(\mathsf{KKI})
\end{aligned}$$

Since $\mathsf{src}(A) = \mathsf{src}(B) = \mathsf{src}(C)$, the proof terms A, B and C are coinitial.

(b) We have

$$\begin{aligned}
\mathsf{tgt}(A) &= \mathsf{rhs}(\sigma)\langle \mathsf{tgt}(\mathsf{KSI}), \mathsf{tgt}(\iota(\mathsf{I})), \mathsf{tgt}(\mathsf{IK})\rangle_\sigma(\mathsf{KKI}) \\
&= (xz(yz))\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto \mathsf{rhs}(\iota)\langle \mathsf{tgt}(\mathsf{I})\rangle_\iota, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= (xz(yz))\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto x\{x \mapsto \mathsf{I}\}, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= (xz(yz))\{x \mapsto \mathsf{KSI}, y \mapsto \mathsf{I}, z \mapsto \mathsf{IK}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= \mathsf{KSI}(\mathsf{IK})(\mathsf{I}(\mathsf{IK}))(\mathsf{KKI}) \\
\mathsf{tgt}(B) &= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})(\mathsf{rhs}(\iota)\langle \mathsf{tgt}(\mathsf{K})\rangle_\iota)(\mathsf{rhs}(\kappa)\langle \mathsf{tgt}(\mathsf{K}), \mathsf{tgt}(\mathsf{I})\rangle_\kappa) \\
&= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})(x\{x \mapsto \mathsf{K}\})(x\{x \mapsto \mathsf{K}, y \mapsto \mathsf{I}\}) \\
&= \mathsf{S}(\mathsf{KSI})(\mathsf{II})\mathsf{KK} \\
\mathsf{tgt}(C) &= \mathsf{rhs}(\sigma)\langle \mathsf{tgt}(\kappa(\mathsf{S},\mathsf{I})), \mathsf{tgt}(\iota(\mathsf{I})), \mathsf{tgt}(\iota(\mathsf{K}))\rangle_\sigma(\mathsf{KKI}) \\
&= (xz(yz))\{x \mapsto \mathsf{rhs}(\kappa)\langle \mathsf{S},\mathsf{I}\rangle_\kappa, y \mapsto \mathsf{rhs}(\iota)\langle \mathsf{tgt}(\mathsf{I})\rangle_\iota, z \mapsto \mathsf{rhs}(\iota)\langle \mathsf{tgt}(\mathsf{K})\rangle_\iota\}(\mathsf{KKI}) \\
&= (xz(yz))\{x \mapsto \mathsf{S}, y \mapsto \mathsf{I}, z \mapsto \mathsf{K}\}(\mathsf{KKI}) \\
&= \mathsf{SK}(\mathsf{IK})(\mathsf{KKI})
\end{aligned}$$

3 Let $t = \mathsf{s}(0+0) \times (0+\mathsf{s}(0))$. The leftmost outermost strategy produces the following rewrite sequence:

$$t \xrightarrow{\mathsf{lo}} \mathsf{s}(0) \times (0+\mathsf{s}(0)) \xrightarrow{\mathsf{lo}} \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0+0) \xrightarrow{\mathsf{lo}} (\mathsf{s}(0) \times (0+0)) + \mathsf{s}(0)$$
$$\xrightarrow{\mathsf{lo}} \mathsf{s}((\mathsf{s}(0) \times (0+0)) + 0) \xrightarrow{\mathsf{lo}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) \times (0+0)) \xrightarrow{\mathsf{lo}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) \times 0) \xrightarrow{\mathsf{lo}} \mathsf{s}(0)$$

The maximal outermost strategy produces the following rewrite sequence:

$$t \xrightarrow{\mathsf{mo}} \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0+0) \xrightarrow{\mathsf{mo}} (\mathsf{s}(0) \times (0+0)) + \mathsf{s}(0) \xrightarrow{\mathsf{mo}} \mathsf{s}((\mathsf{s}(0) \times (0+0)) + 0)$$
$$\xrightarrow{\mathsf{mo}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) \times (0+0)) \xrightarrow{\mathsf{mo}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) \times 0) \xrightarrow{\mathsf{mo}} \mathsf{s}(0)$$

The leftmost innermost strategy produces the following rewrite sequence:

$$t \xrightarrow{\mathsf{li}} \mathsf{s}(0) \times (0+\mathsf{s}(0)) \xrightarrow{\mathsf{li}} \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0+0) \xrightarrow{\mathsf{li}} \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0) \xrightarrow{\mathsf{li}} (\mathsf{s}(0) \times 0) + \mathsf{s}(0) \xrightarrow{\mathsf{li}} 0 + \mathsf{s}(0)$$
$$\xrightarrow{\mathsf{li}} \mathsf{s}(0+0) \xrightarrow{\mathsf{li}} \mathsf{s}(0)$$

The maximal innermost strategy produces the following rewrite sequence:

$$t \xrightarrow{\mathsf{mi}} \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0+0) \xrightarrow{\mathsf{mi}} \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0) \xrightarrow{\mathsf{mi}} (\mathsf{s}(0) \times 0) + \mathsf{s}(0) \xrightarrow{\mathsf{mi}} 0 + \mathsf{s}(0) \xrightarrow{\mathsf{mi}} \mathsf{s}(0+0)$$
$$\xrightarrow{\mathsf{mi}} \mathsf{s}(0)$$

The maximal strategy produces the following rewrite sequence:

$$t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\bullet\; \mathsf{s}(0) \times \mathsf{s}(0+0) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\bullet\; (\mathsf{s}(0) \times 0) + \mathsf{s}(0) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\bullet\; \mathsf{s}(0+0) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\bullet\; \mathsf{s}(0)$$

4 No. Consider the orthogonal TRS consisting of the rules $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{f}(x)$ and $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$. The maximal outermost strategy produces the infinite sequence $\mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \cdots$. We have $\mathsf{f}(\mathsf{a}) \to \mathsf{f}(\mathsf{b})$ but $\mathsf{f}(\mathsf{b}) \to^* \mathsf{f}(\mathsf{a})$ does not hold.

5 The TRS $\mathcal{R}_1$ of Table 3.1 and the TRS of Table 3.6 are left-normal. The TRS $\mathcal{R}_2$ of Table 3.1 and those of Tables 3.2 – 3.5 are not left-normal. This is due to the following left-hand sides:

- ▷ $\mathcal{R}_2$ of Table 3.1: $x + 0$
- ▷ Table 3.2: $x \cdot \mathsf{e}$
- ▷ Table 3.3: $\mathsf{ack}(\mathsf{s}(x), 0)$
- ▷ Table 3.4: $x + (y : z)$
- ▷ Table 3.5: $\mathsf{filter}(\mathsf{s}(x), y : z, w)$

6 Corollary 7.2.5 does not hold for locally confluent overlay systems: The ARS $\mathcal{A}$ consisting of the rules $\mathsf{a} \to \mathsf{a}$ and $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ is locally confluent and (innermost) normalizing but not (innermost) terminating. Moreover, every ARS is an overlay system. Note that $\mathcal{A}$ does not have random descent since $\mathsf{a} \leftarrow \mathsf{a} \to \mathsf{b}$ with normal form b, but $\mathsf{a} \to^0 \mathsf{b}$ does not hold. So also Theorem 7.2.4 fails for locally confluent overlay systems.

Theorem 7.2.12 holds for locally confluent overlay systems. The proof of Theorem 7.2.12 can be reused; the statement "$s{\downarrow}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{c}}|_p = \ell\tau$ for the substitution $\tau = {\downarrow}^{\mathsf{m}}_{\mathsf{c}} \circ \sigma$" in the proof of Lemma 7.2.11 also holds for overlay systems.